Vom Kaffee-Problem

Christoph Daniel Schulze Nis Börge Wechselberg

September 2014

Das n-Kaffee-Problem beschreibt die Guthaben-Schulden-Verhältnisse in einer Gruppe von $n \in \mathbb{N}$ Personen. Die Verhältnisse werden hierbei in ausgegebenen Kaffees notiert. In dieser Arbeit definieren wir das Problem und betrachten Visualisierungen mit dem Ziel, Änderungen in den Verhältnissen möglichst aufwandsminimiert notieren zu können.

1 Einleitung

Der normale universitäre Lehrstuhlbetrieb wird durch Studenten, Doktoranden und Professoren, also allgemein durch *Wissenschaftler*, aufrecht erhalten. Frei nach Paul Erdős sind Wissenschaftler Geräte, welche Kaffee in Theoreme verstoffwechseln. Heißer, schwarzer Kaffee[1] kann also völlig zu Recht als das Fundament menschlichen Fortschitts angesehen werden.

Um die immer wieder notwendigen und erholsamen Unterbrechungen im von ausufernden Denkprozessen gekennzeichneten Alltag herbeizuführen, ist das gemeinsame, rudelhafte Beschaffen von heißem Kaffee üblich. Dabei kommt es immer wieder vor, dass einer der Wissenschaftler kein Geld dabei hat. Ein anderer Wissenschaftler gibt ihm dann üblicherweise einen Kaffee aus in der optimistischen Hoffnung, den Gefallen irgendwann zurückgezahlt zu bekommen. Während die Schuldenverhältnisse bei zwei Personen noch einfach zu handhaben sind, ändert sich das bei größer werdenden Gruppen zunehmend.[2]

In dieser durch die Einleitung eingeleiteten Arbeit definieren wir zu Beginn in Abschnitt 2 das n-Kaffee-Problem, welches die Frage der Schuldenverhältnisse zwischen zwei Mitgliedern einer n Personen großen Gruppe stellt. Wir entwickeln zunächst eine analytische Lösung bevor wir in Abschnitt 3 einfache Visualisierungen für $n \leq 3$ einführen. Wir schließen die Arbeit mit dem Schluss in Abschnitt 4 und liefern Ansatzpunkte für zukünftige Überlegungen.

[1] Wenn man da Milch reintut ist er nicht mehr schwarz, Junge!

[2] Zunahme bei größer werdenden Gruppen ist auch ein von den *Weight Watchers* behandeltes Problem, ist für uns aber nicht weiter von Relevanz.

Verwandte Arbeiten Bla.

Verwandte Arbeiten recherchieren.

2 Erster Hauptteil

Um das Kaffee-Problem betrachten zu können, müssen wir zunächst eine geeignete Menge von Personen definieren, die das Problem überhaupt interessiert.[3]

Definition 1 (Kaffeekränzchen)**.** *Eine Menge* $K = \{p_1, \dots, p_n\}$ *für* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *bezeichnen wir als* Kaffeekränzchen über n Personen *oder kurz* n-Kaffeekränzchen.[4]

Bei einem Kaffekränzchen ist für diese Arbeit unerheblich, ob lediglich Kaffee oder auch Kuchen serviert wird. Wichtig ist lediglich, dass die beteiligten Personen sich gegenseitig Kaffee ausgeben.

Zusätzlich zu dem Kaffeekränzchen benötigen wir noch eine Möglichkeit, die Kaffeeschulden innerhalb der Gruppe zu dokumentieren.

Definition 2 (Kaffeekasse)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* K *ein* n*-Kaffeekränzchen. Eine* K-Kaffeekasse *ist ein Tupel* $k \in \mathbb{Z}^n$, $k = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$*, für das gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Für $1 \leq i \leq n$ *bezeichnet* Δ_i *die Differenz der von* p_i *getrunkenen und ausgegebenen Kaffees.*

Aus der Definition der Δ_i ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_i < 0 :& \quad p_i \text{ bekommt noch } |\Delta_i| \text{ Kaffees} \\ \Delta_i > 0 :& \quad p_i \text{ schuldet noch } \Delta_i \text{ Kaffees} \end{aligned}$$

Gibt eine Person einer anderen nun einen Kaffee aus, müssen wir die Kaffeekasse entsprechend weiterentwickeln.

Definition 3 (Kaffeekassensturz)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*,* K *ein* n*-Kaffeekränzchen,* k *eine* K*-Kaffeekasse sowie* $i \neq j \in [n]$ *so, dass* p_i p_j *einen Kaffee ausgibt. Der Kaffeekassensturz liefert zu* k *eine neue Kaffeekasse* $k' = (\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)$ *mit*

$$\Delta'_x = \begin{cases} \Delta_x - 1 & \text{, falls } x = i \\ \Delta_x + 1 & \text{, falls } x = j \\ \Delta_x & \text{, sonst} \end{cases}$$

für $x \in [n]$.

[3] Hierzu gehört offenbar der Leser, sonst würde er diese Ausarbeitung sicher nicht lesen.

[4] Man könnte in der Definition des Kaffeekränzchens sicherlich auch $n = 1$ zulassen, aber das ist uns zu traurig.

Zieht nun eine Teilmenge des Kaffeekränzchens los, um sich gegenseitig Kaffess auszugeben, ist immer wieder die Frage zu klären, wer gerade mit Bezahlen an der Reihe ist. Das allgemeine n-Kaffee-Problem formalisiert exakt diese Fragestellung.

Definition 4 (n-Kaffee-Problem). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n-Kaffeekränzchen K. Gegeben zwei Personen $p_i, p_j \in K$, die einen Kaffee zusammen trinken wollen. Das n-Kaffee-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob p_i p_j einen Kaffee ausgeben muss oder umgekehrt.*

Betrachten wir das Beispiel $n = 2$.

Beispiel (2-Kaffee-Problem). *Sei K ein 2-Kaffeekränzchen und k eine K-Kaffeekasse. Nehmen wir an, dass bisher p_1 zweimal einen Kaffee für p_2 bezahlt hat. Dann ergibt sich der Zustand $k = (-2, 2)$.*

Es lässt sich leicht erkennen, dass stets $\Delta_1 = -\Delta_2$ gelten muss. Somit können wir ohne Informationsverlust die zweite Komponente der Kaffekasse vernachlässigen und nur noch Δ_1 betrachten. Hierbei gilt:

$\Delta_1 < 0$: *p_2 schuldet p_1 noch $|\Delta_1|$ Kaffees.*

$\Delta_1 = 0$: *Die Kaffeekasse ist ausgeglichen, niemand hat Kaffeeschulden.*

$\Delta_1 > 0$: *p_1 schuldet p_2 noch Δ_1 Kaffees.*

Die im Beispiel angedeutete Vereinfachungsmöglichkeit funktioniert nicht nur für $n = 2$, sondern für beliebige $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 1 (Kaffeesatz). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n-Kaffeekränzchen K. Um das n-Kaffee-Problem zu lösen genügen $n - 1$ Komponenten von k.*

Beweis. Nach Definition 2 gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1} + \Delta_n && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1} && = -\Delta_n \end{aligned}$$

Das Kaffeedelta Δ_n lässt sich also aus den übrigen Kaffeedeltas direkt berechnen und braucht daher nicht explizit in der Kaffeekasse geführt zu werden. □

2.1 Explizite Kaffeekassen und das Kaffee-Paradoxon

Mit der in Definition 2 definierte Kaffeekasse gibt an, wie viele Kaffees eine Person insgesamt noch bekommt oder schuldet. Im Allgemeinen lässt sich aber nicht entscheiden, von wem sie noch Kaffees bekommt oder wem sie Kaffees schuldet. Die Kaffeekasse ist also eine *bilanzierende Kaffeekasse.* Alternativ könnte auch eine explizite Kaffeekasse geführt werden, in der alle Kaffeeschulden innerhalb des Kaffeekränzchens einzeln ausgewiesen werden.

Definition 5 (Explizite Kaffeekasse). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n-Kaffeekränzchen. Eine* explizite K-Kaffeekasse *ist eine Matrix $\kappa \in \mathbb{N}^{n \times n}$ mit:*

1. $\delta_{i,i} = 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$

2. $\delta_{i,j} = -\delta_{j,i}$ *für alle* $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$

Hierbei verhalten sich die einzelnen Kaffeedeltas $\delta_{i,j}$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j} < 0: &\quad p_i \textit{ bekommt von } p_j \textit{ noch } |\delta_{ij}| \textit{ Kaffees.}\\
\delta_{i,j} = 0: &\quad \textit{Die Kaffeebilanz zwischen } p_i \textit{ und } p_j \textit{ ist ausgeglichen.}\\
\delta_{i,j} > 0: &\quad p_i \textit{ schuldet } p_j \textit{ noch } \delta_{ij} \textit{ Kaffees.}
\end{aligned}$$

Für die Verwaltung der expliziten Kaffeekasse definieren wir den Kassensturz analog zu Definition 3.

Definition 6 (Expliziter Kaffeekassensturz)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*,* K *ein Kaffeekränzchen über* n*,* κ *eine explizite* K*-Kaffeekasse sowie* $i \neq j \in [n]$ *so, dass* p_i p_j *einen Kaffee ausgibt. Der explizite Kaffeekassensturz liefert zu* κ *eine neue explizite Kaffeekasse* $\kappa' \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ *mit*

$$\delta'_{k,l} = \begin{cases} \delta_{k,l} - 1 & \textit{, falls } k = i \textit{ und } l = j \\ \delta_{k,l} + 1 & \textit{, falls } k = j \textit{ und } l = i \\ \delta_{k,l} & \textit{, sonst} \end{cases}$$

für $k, l \in \mathbb{N}_{\leq n}$*.*

Satz 2 (Bilanzierender Kaffeekassenexplikationssatz)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}$*,* K *ein* n*-Kaffeekränzchen und* κ *eine explizite* K*-Kaffeekasse. Dann existiert eine entsprechende bilanzierende* K*-Kaffeekasse.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein n-Kaffeekränzchen und κ eine explizite K-Kaffeekasse. Dann existieren laut Definition 5 $\delta_{i,j} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ als Einträge in κ. Setze nun

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}.$$

Trivialerweise gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \Delta_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i-1} \delta_{i,l} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=i+1}^{n} \delta_{i,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i-1} \delta_{i,l} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i-1} -\delta_{i,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{i-1} (\delta_{i,l} - \delta_{i,l}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die bilanzierende Kaffeekasse ergibt sich also als $k = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$. □

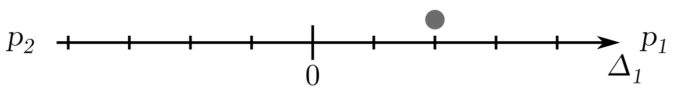

Abbildung 1: Visualisierung des 2-Kaffee-Problems. In diesem Fall schuldet p_1 p_2 noch 2 Kaffees.

Beobachtung 1 (Kaffeeparadoxon)**.** *Betrachten wir das 3-Kaffeekränzchen* $K = \{p_1, p_2, p_3\}$ *und ihre explizite Kaffeekasse* κ*. Nehmen wir an,* p_2 *hat bisher jeweils einen Kaffee für* p_1 *und* p_3 *bezahlt. Weiter hat* p_3 p_1 *einen Kaffee ausgegeben. Somit ergibt sich*

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie aus Definition 6 zu erkennen ist, werden stets zwei symmetrische Komponenten der Matrix modifiziert, wenn ein Kaffee ausgegeben wird. Somit müssen mindestens 3 Kaffees getrunken werden, damit die Kaffeekasse wieder im schuldenfreien Zustand ist.

Bilden wir zu κ *nun die bilanzierende Kaffeekasse* k*, so ergibt sich* $k = (2, -2, 0)$*. Hierbei ist unmittelbar zu erkennen, das nur 2 Kaffees benötigt werden, um die Kaffeeschulden auszugleichen.*

Dieses Phänomen, welches wir als Kaffeeparadoxon *bezeichnen, lässt sich durch das Auftreten* transitiver Kaffeeschulden *begründen. Die bilanzierende Kaffeekasse vermeidet derartige Kaffeeschulden direkt, während sie bei der expliziten Kaffeekasse manuell aufgelöst werden müssen.*

3 Zweiter Hauptteil

Im folgenden stellen wir Möglichkeiten vor, das Kaffeeproblem für Gruppen aus 2 oder 3 Personen grafisch darzustellen bzw. zu lösen.

3.1 Darstellung des 2-Kaffee-Problems

Wie bereits in Definition 2 angesprochen, wird nur eine einzelne Komponente der Kaffeekasse benötigt. Somit stellen wir die Kaffeekasse wie in Abbildung 1 dar.

In der Abbildung lässt sich durch Verschieben des Punktes der Zustand aktualisieren. Hierzu wird der Punkt immer „mit dem Kaffee“ bewegt, also von der ausgebenden Person weg und auf die empfangende Person zu.

3.2 Darstellungen des 3-Kaffee-Problems

Analog zu Unterabschnitt 3.1 kann für die Darstellung des 3-Kaffee-Problems ein kartesisches Koordinatensystem verwendet werden, in dem die Werte von Δ_1 und Δ_2 als Koordinaten eingetragen werden (Abbildung 2). Der sich ergebende Wert von Δ_3 kann

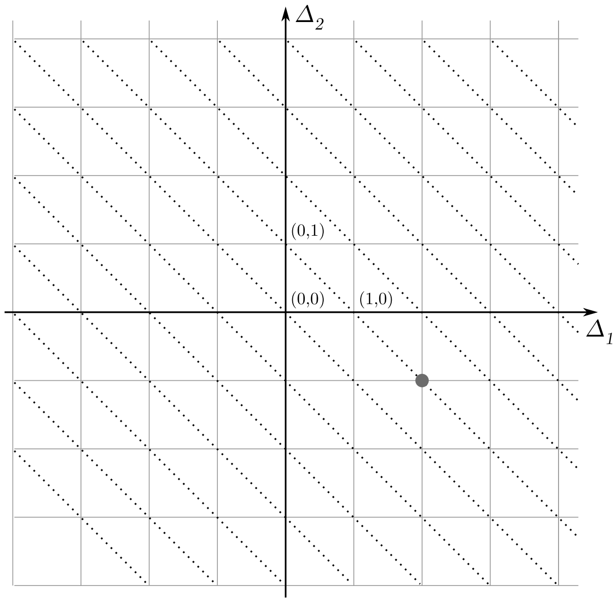

Abbildung 2: Visualisierung des 3-Kaffee-Problems mit kartesischen Koordianten. Die Darstellung entspricht der Kaffeekasse $k = (2, -1, -1)$.

auf den dort eingetragenen Diagonalen abgelesen werden, deren Wert nach links steigt und nach rechts fällt.

Die Aktualisierung der Darstellung muss erfolgen, indem der Punkt den Änderungen in Δ_1 und Δ_2 entsprechend verschoben wird. Man kommt hier zuweilen nicht drum herum, nachzudenken.

Um dieses schwerwiegende Manko zu beheben bietet sich eine Visualisierung in einem gradlinigen, nichtorthogonalen Koordinatensystem an, wie in Abbildung 3 dargestellt. Die Achsen schneiden sich hier in einem Winkel von $60°$. Die Darstellung unterscheidet sich prinzipiell nicht sonderlich von der Darstellung im orthogonalen Koordinatensystem. Allerdings ist das Verschieben der Markierung simpler: um einen ausgegebenen Kaffee einzutragen muss die Markierung „mit dem Kaffee" von der ausgebenden Person weg hin zur empfangenen Person verschoben werden.

4 Schluss

In dieser durch die Einleitung eingeleiteten, durch beiden Hauptteile angereicherten und im Schluss abgeschlossenen Arbeit haben wir das n-Kaffee-Problem eingeführt, Probleme an den Haaren herbeigezogen und schließlich Visualisierungen entwickelt.[5] Mit Hilfe des Kaffeesatzes konnten wir Kaffeekassen auf kleinere Kaffeekassen redu-

[5] Visualisierungen, die sich übrigens prima an Whiteboards machen.

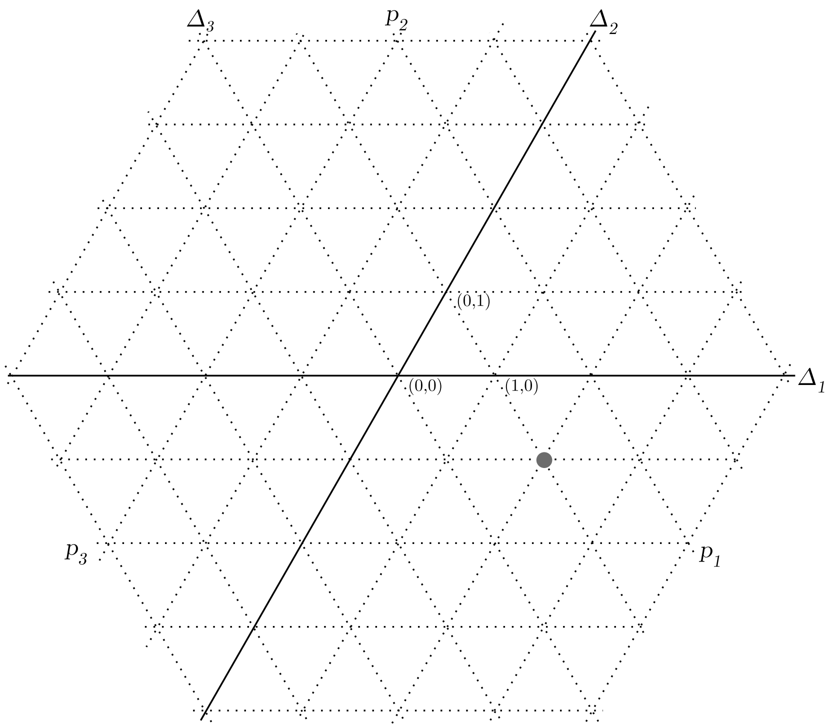

Abbildung 3: Visualisierung des 3-Kaffee-Problems mit schiefen Koordinaten. Die Darstellung entspricht der Kaffeekasse $k = (2, -1, -1)$.

zieren und so auch komplexere Konstellationen visualisieren. Wir haben bilanzierende und explizite Kaffeekassen voneinander abgegrenzt und das Kaffee-Paradoxon nicht nur entdeckt, sondern auch aufgeklärt.

Offen bleibt, ob man einfache Visualisierungen auch für n-Kaffeekränzchen mit $n > 3$ entwickeln kann. Des Weiteren hatten wir keine Lust mehr, weiter nach noch einfacheren Visualisierungen für $n < 4$ zu finden. Wir überlassen es dem geneigten wissenschaftlichen Nachwuchs, darüber Köpfe zu zerbrechen.