Vom Kaffee-Problem

Christoph Daniel Schulze Nis Börge Wechselberg

September 2014

Das n-Kaffee-Problem beschreibt die Guthaben-Schulden-Verhältnisse in einer Gruppe von $n \in$ Personen. Die Verhältnisse werden hierbei in ausgegebenen Kaffees notiert. In dieser Arbeit definieren wir das Problem und betrachten Visualisierungen mit dem Ziel, Änderungen in den Verhältnissen möglichst aufwandsminimiert notieren zu können.

1 Einleitung

Der normale universitäre Lehrstuhlbetrieb wird durch Studenten, Doktoranden und Professoren, also allgemein durch *Wissenschaftler*, aufrecht erhalten. Frei nach Paul Erdős sind Wissenschaftler Geräte, welche Kaffee in Theoreme verstoffwechseln. Heißer, schwarzer Kaffee kann also als die Grundlage der wissenschaftlichen Arbeit angesehen werden.[1]

Um die immer wieder notwendigen und erholsamen Unterbrechungen im durch ausufernde Denkprozesse gekennzeichneten Alltag herbeizuführen, ist das gemeinsame, rudelhafte Beschaffen von heißem Kaffee üblich. Dabei kommt es immer wieder vor, dass einer der Wissenschaftler kein Geld dabei hat. Ein anderer Wissenschaftler gibt ihm dann üblicherweise einen Kaffee aus in der optimistischen Hoffnung, den Gefallen irgendwann zurückgezahlt zu bekommen. Während die Schuldenverhältnisse bei zwei Personen noch einfach zu handhaben sind, ändert sich das bei größer werdenden Gruppen zunehmend.[2]

In dieser durch die Einleitung eingeleiteten Arbeit definieren wir zunächst in Abschnitt 2 das n-Kaffee-Problem, welches die Frage der Schuldenverhältnisse zwischen zwei Mitgliedern einer n Personen großen Gruppe stellt. Wir entwickeln zunächst eine analytische Lösung bevor wir in Abschnitt 3 einfache Visualisierungen für $n \leq 3$ einführen. Wir schließen die Arbeit mit dem Schluss in Abschnitt 4 und liefern Ansatzpunkte für zukünftige Überlegungen.

[1] „Wenn du da Milch reintust ist er doch nicht mehr schwarz, Junge!“ – Captain Jean-Luc Picard

[2] Zunahme bei größer werdenden Gruppen ist auch ein von den *Weight Watchers* behandeltes Problem, ist für uns aber nicht weiter von Relevanz.

Verwandte Arbeiten Bla.

Verwandte Arbeiten recherchieren.

2 Kaffeekränzchen und das Kaffeeproblem

Um das Kaffee-Problem betrachten zu können, müssen wir zunächst eine geeignete Menge von Personen definieren, die das Problem überhaupt interessiert.

Definition 1 (Kaffeekränzchen)**.** *Eine Menge $K = \{p_1, \ldots, p_n\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ bezeichnen wir als* Kaffeekränzchen über n Personen *oder kurz* n-Kaffeekränzchen.[3]

Bei einem Kaffekränzchen ist für diese Arbeit unerheblich, ob lediglich Kaffee oder auch Kuchen serviert wird. Wichtig ist lediglich, dass die beteiligten Personen sich gegenseitig Kaffee ausgeben.

Zusätzlich zu dem Kaffeekränzchen benötigen wir noch eine Möglichkeit, die Kaffeeschulden innerhalb der Gruppe zu dokumentieren.

Definition 2 (Kaffeekasse)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n-Kaffeekränzchen. Eine* K-Kaffeekasse *ist ein Tupel $k \in \mathbb{Z}^n$, $k = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, für das gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Für $1 \leq i \leq n$ bezeichnet Δ_i die Differenz der von p_i getrunkenen und ausgegebenen Kaffees.

Aus der Definition der Δ_i ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_i < 0: &\quad p_i \text{ bekommt noch } |\Delta_i| \text{ Kaffees} \\ \Delta_i > 0: &\quad p_i \text{ schuldet noch } \Delta_i \text{ Kaffees} \end{aligned}$$

Gibt eine Person einer anderen nun einen Kaffee aus, müssen wir die Kaffeekasse entsprechend weiterentwickeln.

Definition 3 (Kaffeekassentransition)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, K ein n-Kaffeekränzchen, k eine K-Kaffeekasse sowie $i \neq j \in [n]$ so, dass p_i p_j einen Kaffee ausgibt. Die Kaffeekassentransition liefert zu k eine neue Kaffeekasse $k' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_n)$ mit*

$$\Delta'_x = \begin{cases} \Delta_x - 1 & \text{, falls } x = i \\ \Delta_x + 1 & \text{, falls } x = j \\ \Delta_x & \text{, sonst} \end{cases}$$

für $x \in [n]$.

[3] Man könnte in der Definition des Kaffeekränzchens sicherlich auch $n = 1$ zulassen, aber das ist uns zu traurig.

Zieht nun eine Teilmenge des Kaffeekränzchens los, um sich gegenseitig Kaffess auszugeben, ist immer wieder die Frage zu klären, wer gerade mit Bezahlen an der Reihe ist. Das allgemeine n-Kaffee-Problem formalisiert exakt diese Fragestellung.

Definition 4 (n-Kaffee-Problem)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n-Kaffeekränzchen K. Gegeben zwei Personen $p_i, p_j \in K$, die einen Kaffee zusammen trinken wollen. Das n-Kaffee-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob p_i p_j einen Kaffee ausgeben muss oder umgekehrt.*

Betrachten wir das Beispiel $n = 2$.

Beispiel (2-Kaffee-Problem)**.** *Sei K ein 2-Kaffeekränzchen und k eine K-Kaffeekasse. Nehmen wir an, dass bisher p_1 zweimal einen Kaffee für p_2 bezahlt hat, dann ergibt sich der Zustand $k = (-2, 2)$.*

Es lässt sich leicht erkennen, dass stets $\Delta_1 = -\Delta_2$ gelten muss. Somit können wir ohne Informationsverlust die zweite Komponente der Kaffekasse vernachlässigen und nur noch Δ_1 betrachten. Hierbei gilt:

$\Delta_1 < 0:$ *p_2 schuldet p_1 noch $|\Delta_1|$ Kaffees.*

$\Delta_1 = 0:$ *Die Kaffeekasse ist ausgeglichen, niemand hat Kaffeeschulden.*

$\Delta_1 > 0:$ *p_1 schuldet p_2 noch Δ_1 Kaffees.*

Die im Beispiel angedeutete Vereinfachungsmöglichkeit funktioniert nicht nur für $n = 2$, sondern für beliebige $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 1 (Kaffeesatz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n-Kaffeekränzchen K. Um das n-Kaffee-Problem zu lösen genügt eine $(n-1)$-Kaffeekasse.*

Beweis. Nach Definition 2 gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1} + \Delta_n && = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1} && = -\Delta_n \end{aligned}$$

Das Kaffeedelta Δ_n lässt sich also aus den übrigen Kaffeedeltas direkt berechnen und braucht daher nicht explizit in der Kaffeekasse geführt zu werden. □

2.1 Explizite Kaffeekassen und das Kaffee-Paradoxon

Die in Definition 2 definierte Kaffeekasse modelliert einen gemeinsamen Kaffeepool innerhalb des Kaffeekränzchens. Diese Kaffeekasse kann auch als *bilanzierende Kaffeekasse* bezeichnet werden. Als alternative Notation könnte auch eine explizite Kaffeekasse vorgehalten werden, in der alle Kaffeeschulden innerhalb des Kaffeekränzchens einzeln ausgewiesen werden.

Definition 5 (Explizite Kaffeekasse)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n-Kaffeekränzchen. Eine* explizite K-Kaffeekasse *ist die Matrix $\kappa \in \mathbb{N}^{n \times n}$ wobei gilt:*

1. *$\delta_{i,i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$*

2. $\delta_{i,j} = -\delta_{j,i}$ *für alle* $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$

Hierbei verhalten sich die einzelnen Kaffeedeltas δ_{ij} *wie folgt:*

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} < 0: &\quad p_j \textit{ schuldet } p_i \textit{ noch } |\delta_{ij}| \textit{ Kaffees.}\\
\delta_{ij} = 0: &\quad \textit{Niemand hat Kaffeeschulden.}\\
\delta_{ij} > 0: &\quad p_i \textit{ schuldet } p_j \textit{ noch } \delta_{ij} \textit{ Kaffees.}
\end{aligned}$$

Für die Verwaltung der expliziten Kaffeekasse definieren wir die Transistion analog zu Definition 3.

Definition 6 (Explizite Kaffeekassentransition)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$*,* K *ein Kaffeekränzchen über* n*,* κ *eine explizite* K*-Kaffeekasse sowie* $i \neq j \in [n]$ *so, dass* p_i p_j *einen Kaffee ausgibt. Die explizite Kaffeekassentransition liefert zu* κ *eine neue explizite Kaffeekasse* $\kappa' \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ *mit*

$$\delta'_{k,l} = \begin{cases} \delta_{k,l} - 1 & \textit{, falls } k = i \textit{ und } l = j \\ \delta_{k,l} + 1 & \textit{, falls } k = j \textit{ und } l = i \\ \delta_{k,l} & \textit{, sonst} \end{cases}$$

für $k, l \in \mathbb{N}_{\leq n}$*.*

Satz 2. *Sei* $n \in \mathbb{N}$*,* K *ein* n*-Kaffeekränzchen und* κ *eine explizite* K*-Kaffeekasse. Dann existiert eine entsprechende, bilanzierende* K*-Kaffeekasse.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein n-Kaffeekränzchen und κ eine explizite K-Kaffeekasse. Dann existieren laut Definition 5 $\delta_{i,j} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ als Einträge in κ. Setze nun

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}.$$

Dann ergibt sich die bilanzierende Kaffeekasse als $k = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$. □

Beobachtung 1 (Kaffeeparadoxon)**.** *Betrachten wir das 3-Kaffeekränzchen* $K = p_1, p_2, p_3$ *und ihre explizite Kaffeekasse* κ*. Bisher hat* p_2 *jeweils einen Kaffee für* p_1 *und* p_3 *bezahlt. Weiter hat* p_3 p_1 *einen Kaffee ausgegeben. Somit ergibt sich*

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie aus Definition 6 zu erkennen ist, werden stets zwei symmetrische Komponenten der Matrix modifiziert, wenn ein Kaffee ausgegeben wird. Somit müssen mindestens 3 Kaffees getrunken werden, damit die Kaffeekasse wieder im schuldenfreien Zustand ist.

Bilden wir zu κ *nun die bilanzierende Kaffeekasse* k*, so ergibt sich* $k = (2, -2, 0)$*. Hierbei ist zu erkennen, das nur 2 Kaffees benötigt werden, um die Kaffeeschulden auszugleichen.*

Dieses Phänomen, welches wir als Kaffeeparadoxon *bezeichnen, lässt sich in dem Auftreten von* transitiven Kaffeeschulden *begründen. Die bilanzierende Kaffeekasse vermeidet derartige Kaffeeschulden direkt, während sie bei der expliziten Kaffeekasse manuell aufgelöst werden müssen.*

3 Visualisierung des Kaffeeproblems

4 Zusammenfassung

Zusammenfassung des Papers. Mögliche Future Work:

- Kaffeeproblem für $n > 3$ visualisieren
- Wir haben noch keinen Beweis dafür, dass die Visualisierung in einem Dreieck unmöglich oder zumindest blöd ist.