



# Vom Kaffeeproblem

*Heißer, schwarzer Kaffee, Junge!*





TODO  
Tibor-Kurve

# Das Problem!



# Das Problem!

Zwei Personen:



# Das Problem!

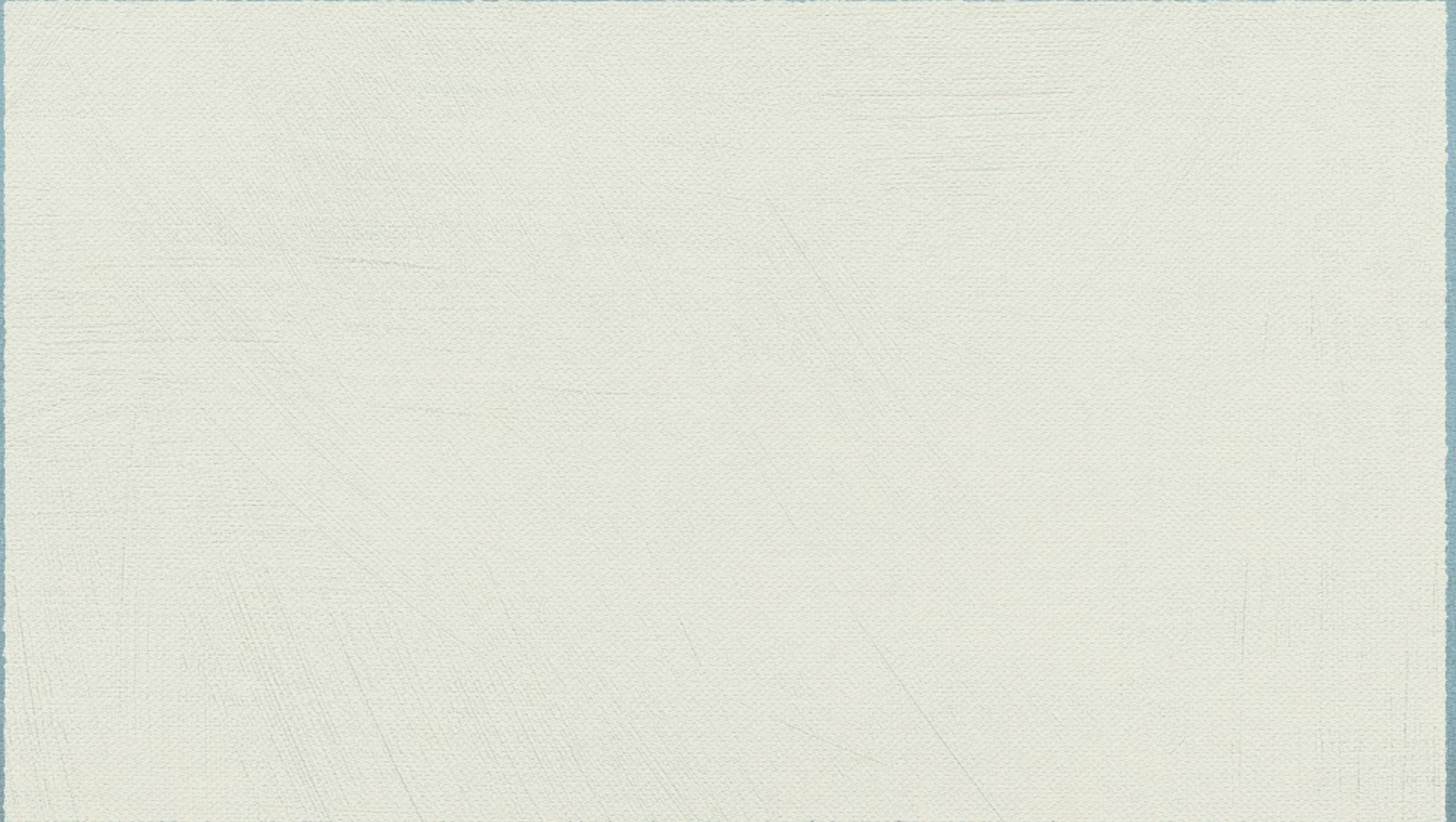
Zwei Personen:



Drei Personen:



# Referenzen



# Referenzen

- ◆ Troyer, Markle. *Coffee drinking: an emerging social problem?* (1984)

# Referenzen

- ◆ Troyer, Markle. *Coffee drinking: an emerging social problem?* (1984)
- ◆ Boldt, Traulsen, von Hanxleden. *Worst case reaction time analysis of concurrent reactive programs.* (2008)

# Referenzen

- ◆ Troyer, Markle. *Coffee drinking: an emerging social problem?* (1984)
- ◆ Boldt, Traulsen, von Hanxleden. *Worst case reaction time analysis of concurrent reactive programs.* (2008)
- ◆ Fisher. *The international coffee agreement—a study in coffee diplomacy.* (1972)

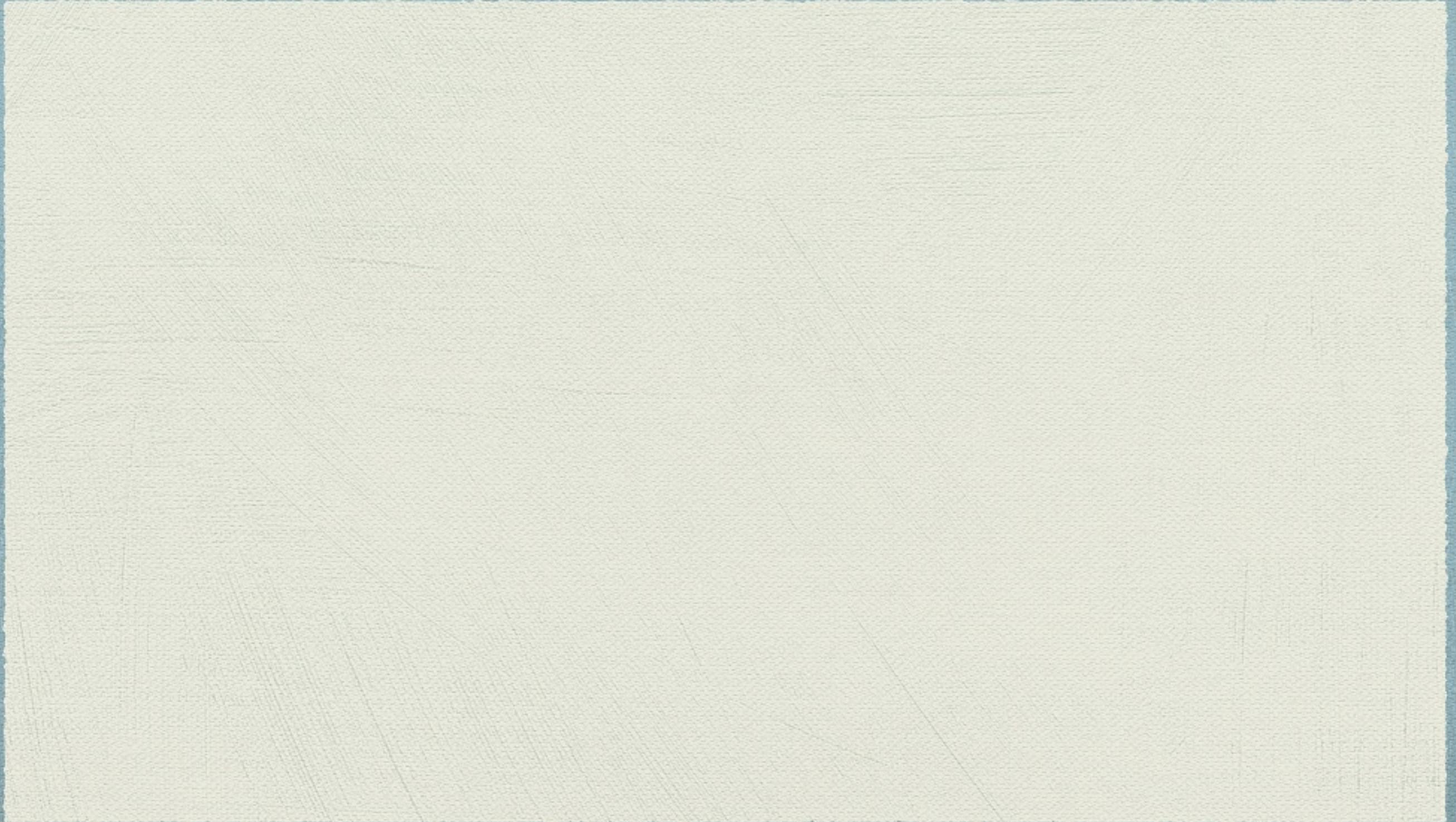
# Referenzen

- ◆ Troyer, Markle. *Coffee drinking: an emerging social problem?* (1984)
- ◆ Boldt, Traulsen, von Hanxleden. *Worst case reaction time analysis of concurrent reactive programs.* (2008)
- ◆ Fisher. *The international coffee agreement—a study in coffee diplomacy.* (1972)
- ◆ Masinter. *Hyper Text Coffee Pot Control Protocol (HTCPCP/1.0).* (RFC 2324, 1998)

# Referenzen

- ◆ Troyer, Markle. *Coffee drinking: an emerging social problem?* (1984)
- ◆ Boldt, Traulsen, von Hanxleden. *Worst case reaction time analysis of concurrent reactive programs.* (2008)
- ◆ Fisher. *The international coffee agreement—a study in coffee diplomacy.* (1972)
- ◆ Masinter. *Hyper Text Coffee Pot Control Protocol (HTCPCP/1.0).* (RFC 2324, 1998)
- ◆ Nazar. *The Hyper Text Coffee Pot Control Protocol for Tea Efflux Appliances (HTCPCP-TEA).* (RFC 7168, 2014)

# Agenda



# Agenda

1. Einleitung

# Agenda

1. ~~Einleitung~~

# Agenda

1. ~~Einleitung~~
2. Erster Hauptteil

# Agenda

1. ~~Einleitung~~
2. Erster Hauptteil
3. Zweiter Hauptteil

# Agenda

1. ~~Einleitung~~
2. Erster Hauptteil
3. Zweiter Hauptteil
4. Schluss

# Erster Hauptteil

# Kaffeekränzchen

Eine Menge

$$K = \{p_1, \dots, p_n\}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

heißt *Kaffeekränzchen über  $n$  Personen* oder kurz  *$n$ -Kaffeekränzchen*.

# Kaffeekasse

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $K$  ein  $n$ -Kaffeekränzchen.  
Eine  $K$ -Kaffeekasse ist ein Tupel

$$k \in \mathbb{Z}^n, \quad k = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$$

mit

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0.$$

# Kaffeeproblem

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $k$  eine Kaffeekasse über dem  $n$ -Kaffeekränzchen  $K$ . Gegeben zwei Personen  $p_i, p_j \in K$ , die einen Kaffee zusammen trinken wollen.

# Kaffeeproblem

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $k$  eine Kaffeekasse über dem  $n$ -Kaffeekränzchen  $K$ . Gegeben zwei Personen  $p_i, p_j \in K$ , die einen Kaffee zusammen trinken wollen.

*Wer muss wem einen Kaffee ausgeben?*







**Christoph  
Daniel**

**Miro**



Christoph Daniel	Miro
0	0

**Christoph  
Daniel**

**Miro**

0

0

-1

1





Christoph Daniel	Miro
0	0
-1	1
-2	2

**Christoph  
Daniel**

**Miro**

0

0

-1

1

-2

2

-1

1



Christoph Daniel	Miro
0	0
-1	1
-2	2
-1	1

→0!



Christoph Daniel	Miro
0	0
-1	1
-2	2
-1	1

→0!

→0!



Christoph Daniel	Miro
0	0
-1	1
-2	2
-1	1

→0!

→0!

→0!



Christoph Daniel	Miro	
0	0	→0!
-1	1	→0!
-2	2	→0!
-1	1	→0!

# Kaffeesatz

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $k$  eine Kaffeekasse über dem  $n$ -Kaffeekränzchen  $K$ . Um das Kaffeeproblem zu lösen genügen  $n - 1$  Komponenten von  $k$ .

# Kaffeesatz

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $k$  eine Kaffeekasse über dem  $n$ -Kaffeekränzchen  $K$ . Um das Kaffeeproblem zu lösen genügen  $n - 1$  Komponenten von  $k$ .

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1} + \Delta_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1} &= -\Delta_n \end{aligned}$$

# Explizite Kaffeekasse

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $K$  ein  $n$ -Kaffeekränzchen.  
Eine explizite  $K$ -Kaffeekasse ist eine Matrix  $\kappa \in \mathbb{N}^{n \times n}$  mit:

1.  $\kappa_{i,i} = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$  und

2.  $\kappa_{i,j} = -\kappa_{j,i}$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ .

# Kaffeeparadoxon

Explizite Kaffeekasse:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Kaffeeparadoxon

Explizite Kaffeekasse:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bilanzierende Kaffeekasse:

$$k = (2, -2, 0)$$

# Kaffeeparadoxon

Explizite Kaffeekasse:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 3 \text{ Kaffees}$$

Bilanzierende Kaffeekasse:

$$k = (2, -2, 0)$$

# Kaffeeparadoxon

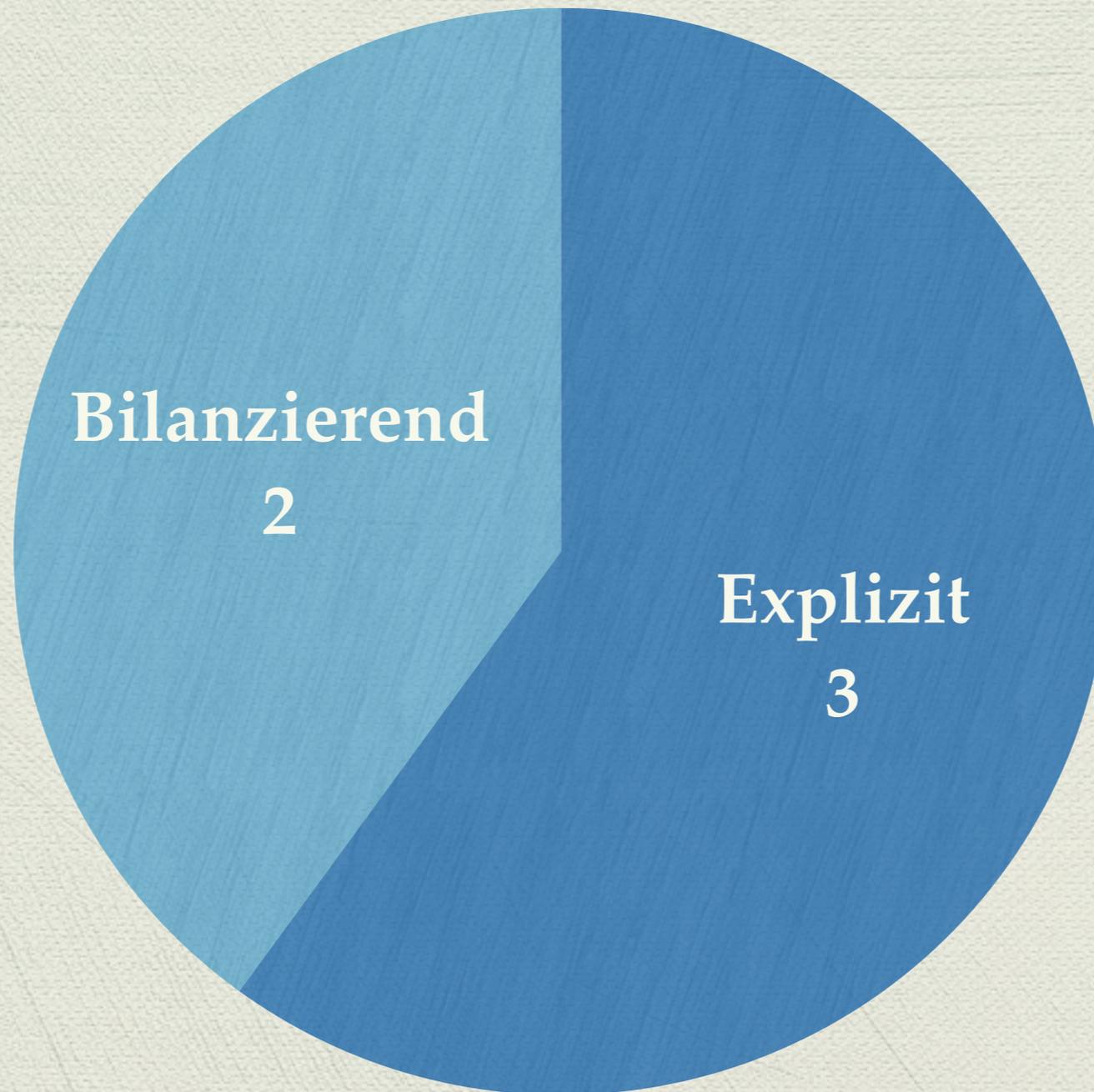
Explizite Kaffeekasse:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 3 \text{ Kaffees}$$

Bilanzierende Kaffeekasse:

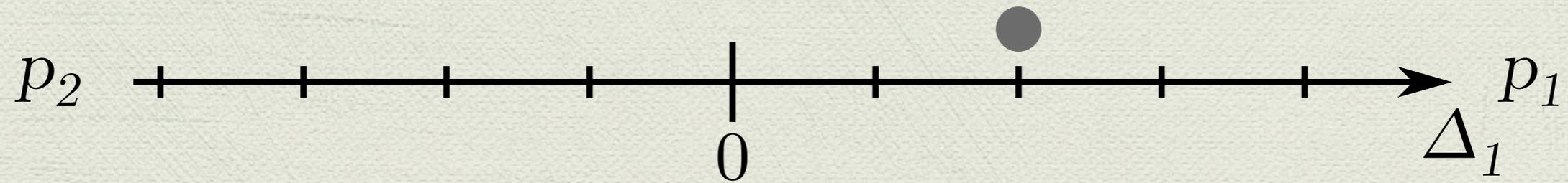
$$k = (2, -2, 0) \longrightarrow 2 \text{ Kaffees!!!}$$

# Kaffeeparadoxon

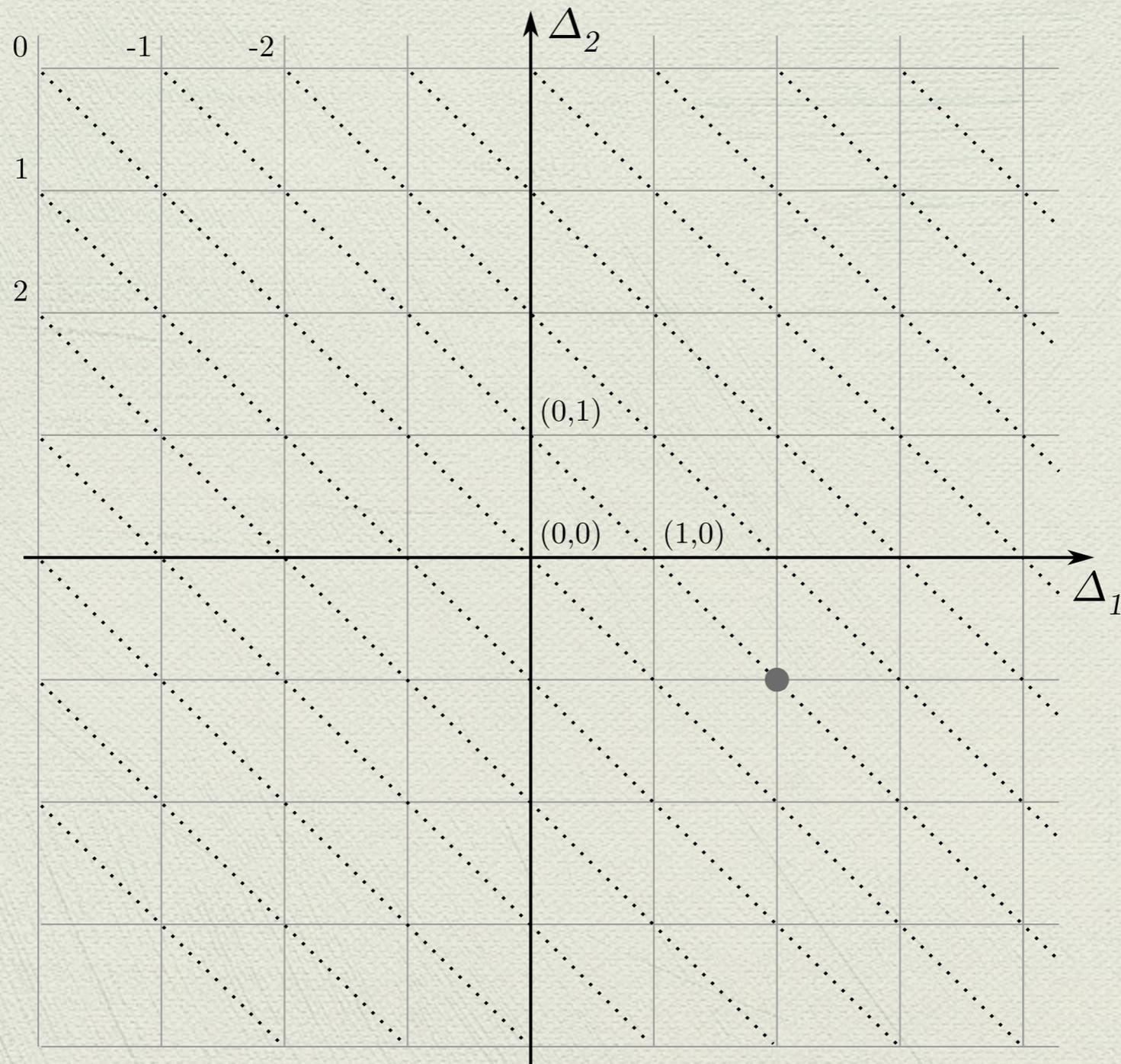


# Zweiter Hauptteil

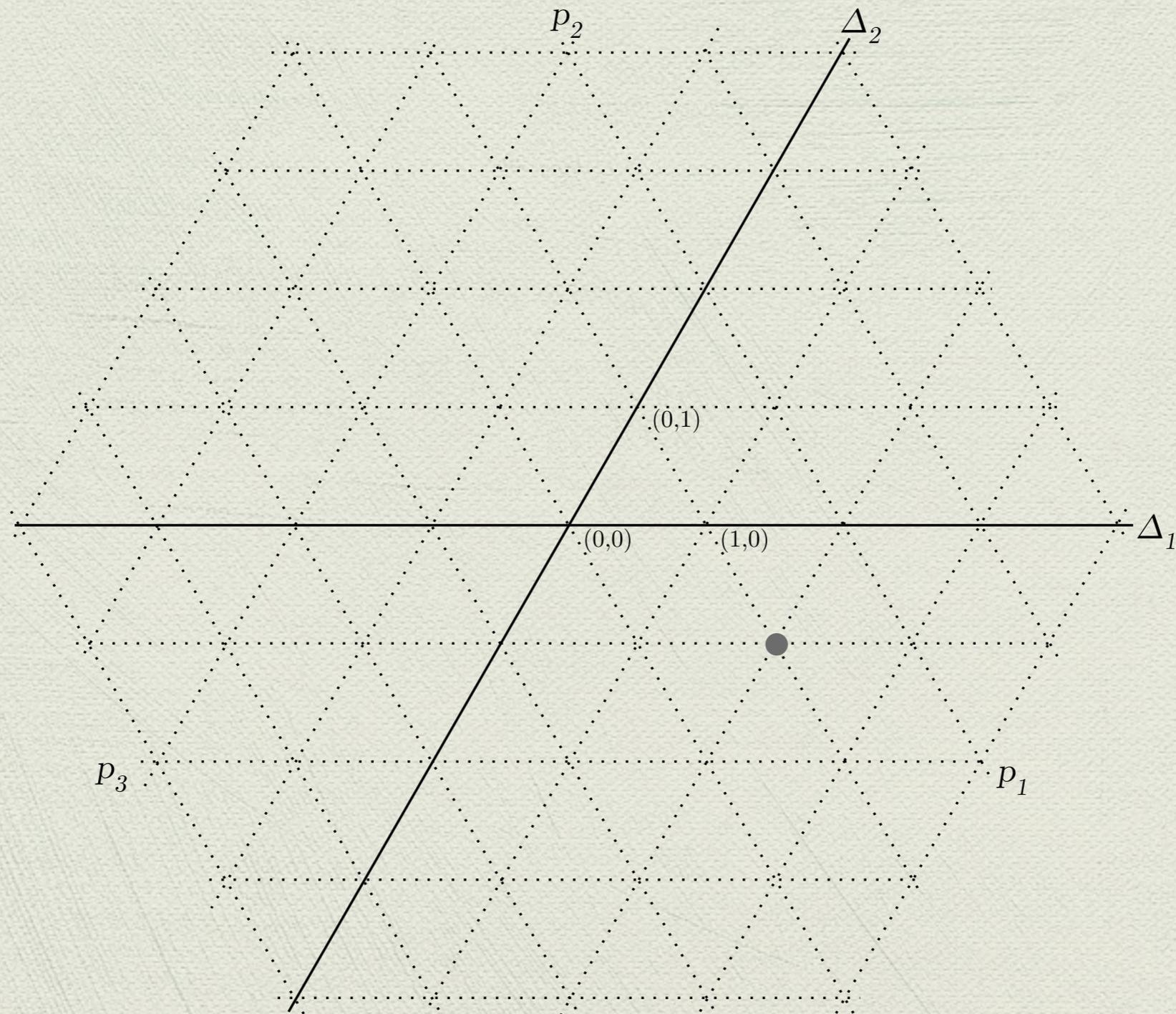
# Zwei Personen: Kaffeestahl



# Drei Personen: Kartesisch

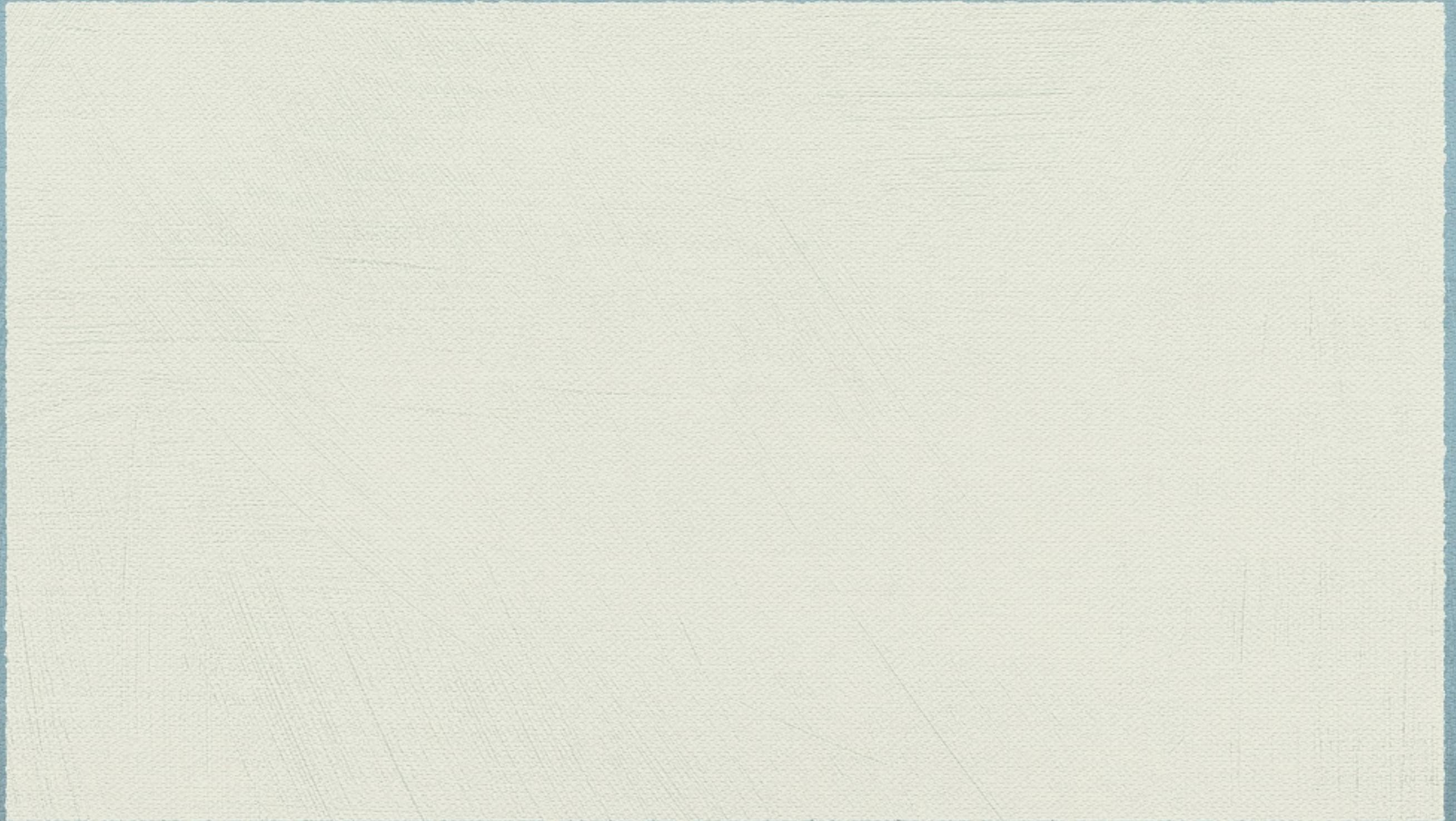


# Drei Personen: Schief



Schluss

# Zusammenfassung



# Zusammenfassung

- ◆ Kaffeeproblem

# Zusammenfassung

- ◆ Kaffeeproblem
- ◆ Kaffeesatz

# Zusammenfassung

- ◆ Kaffeeproblem
- ◆ Kaffeesatz
- ◆ Explizite vs. bilanzierende Kaffeekasse

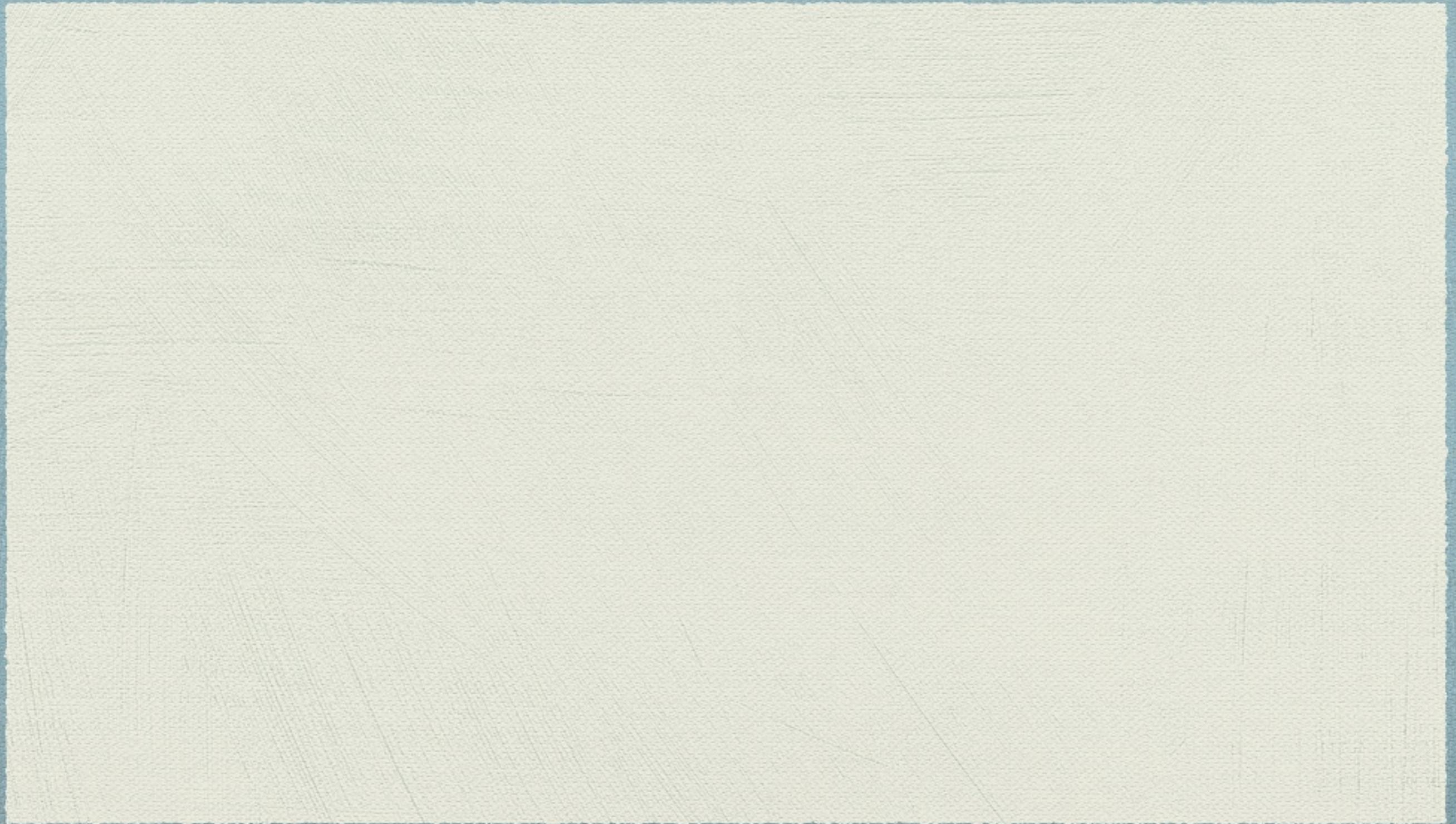
# Zusammenfassung

- ◆ Kaffeeproblem
- ◆ Kaffeesatz
- ◆ Explizite vs. bilanzierende Kaffeekasse
- ◆ Kaffeeparadoxon

# Zusammenfassung

- ◆ Kaffeeproblem
- ◆ Kaffeesatz
- ◆ Explizite vs. bilanzierende Kaffeekasse
- ◆ Kaffeeparadoxon
- ◆ Visualisierungen

# Ausblick



# Ausblick

- ◆ Ein- und Austritt von Personen

# Ausblick

- ◆ Ein- und Austritt von Personen
- ◆ Einfache Visualisierungen für  $n > 3$ ?

# Ausblick

- ◆ Ein- und Austritt von Personen
- ◆ Einfache Visualisierungen für  $n > 3$ ?
- ◆ Einfachere Visualisierungen für  $n < 4$ ?

Anhang

(für unqualifizierten Fragen)

# Kaffeeparadoxon

