Vom Kaffee-Problem

Christoph Daniel Schulze Nis Börge Wechselberg

September 2014

Das n-Kaffee-Problem beschreibt die Guthaben-Schulden-Verhältnisse in einer Gruppe von $n \in$ Personen. Die Verhältnisse werden hierbei in ausgegebenen Kaffees notiert. In dieser Arbeit definieren wir das Problem und betrachten Visualisierungen mit dem Ziel, Änderungen in den Verhältnissen möglichst aufwandsminimiert notieren zu können.

1 Einleitung

Der normale universitäre Lehrstuhlbetrieb wird durch Studenten, Doktoranden und Professoren, also allgemein durch *Wissenschaftler*, aufrecht erhalten. Frei nach Paul Erdős sind Wissenschaftler Geräte, welche Kaffee in Theoreme verstoffwechseln. Heißer, schwarzer Kaffee kann also als die Grundlage der wissenschaftlichen Arbeit angesehen werden.[1]

Um die immer wieder notwendigen und erholsamen Unterbrechungen im durch ausufernde Denkprozesse gekennzeichneten Alltag herbeizuführen, ist das gemeinsame, rudelhafte Beschaffen von heißem Kaffee üblich. Dabei kommt es immer wieder vor, dass einer der Wissenschaftler kein Geld dabei hat. Ein anderer Wissenschaftler gibt ihm dann üblicherweise einen Kaffee aus in der optimistischen Hoffnung, den Gefallen irgendwann zurückgezahlt zu bekommen. Während die Schuldenverhältnisse bei zwei Personen noch einfach zu handhaben sind, ändert sich das bei größer werdenden Gruppen zunehmend.[2]

In dieser durch die Einleitung eingeleiteten Arbeit definieren wir zunächst in Abschnitt 2 das n-Kaffee-Problem, welches die Frage der Schuldenverhältnisse zwischen zwei Mitgliedern einer n Personen großen Gruppe stellt. Wir entwickeln zunächst eine analytische Lösung bevor wir in Abschnitt 3 einfache Visualisierungen für $n \leq 3$ einführen. Wir schließen die Arbeit mit dem Schluss in Abschnitt 4 und liefern Ansatzpunkte für zukünftige Überlegungen.

[1] „Wenn du da Milch reintust ist er doch nicht mehr schwarz, Junge!“ – Captain Jean-Luc Picard

[2] Zunahme bei größer werdenden Gruppen ist auch ein von den *Weight Watchers* behandeltes Problem, ist für uns aber nicht weiter von Relevanz.

Verwandte Arbeiten Bla.

Verwandte Arbeiten recherchieren.

2 Kaffeekränzchen und das Kaffeeproblem

Um das Kaffee-Problem betrachten zu können, müssen wir zunächst eine geeignete Menge von Personen definieren, welche das Problem überhaupt tangiert.

Definition 1 (Kaffeekränzchen)**.** *Eine Menge* $K = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *für* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *bezeichnen wir als* Kaffeekränzchen über n Personen *oder kurz* n-Kaffeekränzchen*.*

Bei einem Kaffekränzchen ist für diese Arbeit unerheblich, ob lediglich Kaffee oder auch Kuchen serviert wird. Wichtig ist lediglich, dass die beteiligten Personen sich gegenseitig Kaffee ausgeben.

Zusätzlich zu dem Kaffeekränzchen benötigen wir noch eine Möglichkeit, die Kaffeeschulden innerhalb der Gruppe zu dokumentieren.

Definition 2 (Kaffeekasse)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* K *ein* n*-Kaffeekränzchen. Eine* K-Kaffeekasse *ist ein Tupel* $k \in \mathbb{Z}^n$, $k = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$*, für das gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Für $1 \leq i \leq n$ *bezeichnet* Δ_i *die Differenz der von* p_i *getrunkenen und ausgegebenen Kaffees.*

Aus der Definition der Δ_i ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_i < 0 &: p_i \text{ bekommt noch } |\Delta_i| \text{ Kaffees} \\ \Delta_i > 0 &: p_i \text{ schuldet noch } \Delta_i \text{ Kaffees} \end{aligned}$$

Wir können nun das allgemeine n-Kaffee-Problem formulieren.

Definition 3 (n-Kaffee-Problem)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *und* k *eine Kaffeekasse über dem* n*-Kaffeekränzchen* K*. Gegeben zwei Personen* $p_i, p_j \in K$*, die einen Kaffee zusammen trinken wollen. Das* n*-Kaffee-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob* p_i p_j *einen Kaffee ausgeben muss oder umgekehrt.*

Betrachtet man die Anforderung an die Kaffeekasse, dass die Summe über die Kaffee-Deltas 0 sein soll, fällt eine Vereinfachungsmöglichkeit auf.

Satz 1. *Um das* n*-Kaffee-Problem zu lösen genügt eine* $(n-1)$*-Kaffeekasse.*

Beweis. Ist noch zu formulieren. □

2.1 Bilanzierende Kaffeekassen und das Kaffee-Paradoxon

Die Unterscheidung zwischen bilanzierenden und expliziten Kaffeekassen einführen. Das Kaffeeparadoxon beschreiben und auflösen.

3 Visualisierung des Kaffeeproblems

Beispiel (2-Kaffee-Problem)**.** *Sind nur 2 Personen p_0 und p_1 an der Kaffeerunde beteiligt, lässt sich das 2-Kaffee-Problem als $x \in \mathbb{Z}$ beschreiben. Hierbei gilt:*

x = 0 *Das Verhältnis ist ausgeglichen, niemand hat Kaffeeschulden.*

x* $>$ *0 *p_1 schuldet p_0 noch x Kaffees.*

x* $<$ *0 *p_0 schuldet p_1 noch x Kaffees.*

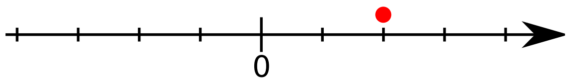

Abbildung 1: Beispiel für das 2-Körper-Problem, p_1 schuldet p_0 noch 2 Kaffee

Definition 4 (n-Kaffee-Problem)**.** *Das allgemeine **n-Kaffee-Problem** zu einer Kafferunde K mit n Personen lässt sich definieren als $x \in \mathbb{Z}^{n-1}$, also $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$. Zu diesem Tupel werden die Kaffeefunktion $k_{i,j} : \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}^{n-1}$ definiert durch*

Formel korrigieren

$$k_{i,j}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \begin{cases} (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) & \text{, falls } i < n \\ (x_0 - 1, \dots, x_{n-1} - 1) & \text{, falls } i = n \end{cases}$$

*Diese Kaffeefunktion k_i gibt die Veränderung der Guthaben-Schulden-Verhältnisse innerhalb der Kaffeerunde an, wenn p_i ein Kaffee **ausgegeben wird**.*

4 Zusammenfassung

Zusammenfassung des Papers. Mögliche Future Work:

- Kaffeeproblem für $n > 3$ visualisieren