Vom Kaffee-Problem

Christoph Daniel Schulze Nis Börge Wechselberg

Dezember 2014

Das n-Kaffee-Problem beschreibt die Guthaben-Schulden-Verhältnisse in einer Gruppe von $n \in \mathbb{N}$ Personen. Die Verhältnisse werden hierbei in ausgegebenen Kaffees notiert. In dieser Arbeit definieren wir das Problem und betrachten Visualisierungen mit dem Ziel, Änderungen in den Verhältnissen möglichst aufwandsminimiert notieren zu können.

1 Einleitung

Der normale universitäre Wissenschaftsbetrieb wird durch Studenten, Doktoranden und Professoren, also allgemein durch *Wissenschaftler*, aufrecht erhalten. Frei nach Paul Erdős sind Wissenschaftler Geräte, welche *Kaffee* in *Theoreme* verstoffwechseln. Heißer, schwarzer Kaffee[1] kann also völlig zu Recht als das Fundament menschlichen Fortschitts angesehen werden.

Um die immer wieder notwendigen und erholsamen Unterbrechungen im von ausufernden Denkprozessen gekennzeichneten Alltag herbeizuführen, ist das gemeinsame, rudelhafte Beschaffen von heißem Kaffee üblich.[2] Dabei kommt es immer wieder vor, dass einer der Wissenschaftler kein Geld dabei hat. Ein anderer Wissenschaftler gibt ihm dann üblicherweise einen Kaffee aus in der optimistischen Hoffnung, den Gefallen irgendwann heimgezahlt zu bekommen. Während die Schuldenverhältnisse bei zwei Personen noch einfach zu handhaben sind, ändert sich das bei größer werdenden Gruppen zunehmend.[3]

Aufbau In dieser durch die Einleitung eingeleiteten Arbeit definieren wir zu Beginn im ersten Hauptteil das n-Kaffee-Problem, welches die Frage der Schuldenverhältnisse zwischen zwei Mitgliedern einer n Personen großen Gruppe stellt. Wir entwickeln zunächst eine analytische Lösung bevor wir im zweiten Hauptteil einfache Visualisierungen für $n \leq 3$ einführen. Wir schließen die Arbeit mit dem Schluss und liefern Ansatzpunkte für zukünftige Überlegungen.

[1] Wenn man da Milch reintut ist er aber nicht mehr schwarz.

[2] Das gilt nicht nur für den 29. September, den *Tag des Kaffees*.

[3] Zunahme bei größer werdenden Gruppen ist auch ein von den *Weight Watchers* behandeltes Problem, ist für uns aber nicht weiter von Relevanz.

Verwandte Arbeiten Unseres Wissens nach ist diese Arbeit die erste, die sich mit den finanziellen Aspekten kaffeespendierender Gruppen auseinandersetzt. Viel Forschungsarbeit wurde allerdings in anderen Bereichen der wunderbaren Welt des Kaffees geleistet.

Troyer und Markle betrachten gesundheitliche Folgen des Kaffeetrinkens und beleuchten die Frage, ob Kaffee ein zunehmendes soziales Problem sei [6]. In der vorliegenden Arbeit ist Kaffee kein Problem, sondern heiß und lecker. Tatsächlich gibt es frei erfundene Indizien, dass ein Mangel an Kaffee die Reaktionszeiten von Wissenschaftlern nachhaltig negativ beeinflusst. Ähnliche Reaktionszeitbetrachtungen wurden bislang nur für reaktive Softwaresysteme durchgeführt (zum Beispiel von Boldt, Traulsen und von Hanxleden [1]), wobei maximal die Autoren, nicht aber die Softwaresysteme unter Kaffeeeinfluss standen.

Während sich die vorliegende Arbeit insbesondere auf kleinere Gruppen bezieht, unternimmt Fisher eine Studie, die beleuchtet, wie die *International Coffee Organization* (ICO) Krisen im internationalen Kaffeegeschehen löst. Mit Diplomatie.

Fasano et al. haben mathematische Modelle zur Beschreibung des Prozesses eingeführt, Espresso aufzubrühen [2]. Unsere Arbeit bezieht sich im Gegensatz zu Fasano et al. nicht auf die Seite des Aufbrühenden, sondern des potentiell Verbrühten. Ebenfalls auf den Herstellungsprozess beziehen sich *Requests for Comments* (RFC), welche das *Hyper Text Coffee Pot Control Protocol* sowie Erweiterungen für Tee spezifieren [4, 5].

Trotz ähnlicher Terminologie beziehen sich Arbeiten zu *Java* enttäuschenderweise oft auf die Programmiersprache. Sollte beispielsweise Heinold Kaffee trinken, verliert er in seiner Abschlussarbeit nicht ein einziges Wort darüber und vermeidet so die Möglichkeit, deren Qualität noch weiter zu steigern [3].

Walker beschäftigt sich damit, wo Krokodile und Vögel herkommen [7].

2 Erster Hauptteil

Um das Kaffee-Problem betrachten zu können, müssen wir zunächst eine geeignete Menge von Personen definieren, die das Problem überhaupt interessiert.[4]

Definition 1 (Kaffeekränzchen)**.** *Eine Menge* $K = \{p_1, \ldots, p_n\}$ *für* $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *bezeichnen wir als* Kaffeekränzchen über n Personen *oder kurz* n-Kaffeekränzchen.[5]

Bei einem Kaffekränzchen ist für diese Arbeit unerheblich, ob lediglich Kaffee oder auch Kuchen serviert wird. Wichtig ist lediglich, dass die beteiligten Personen sich gegenseitig Kaffee ausgeben.[6]

Zu dem Kaffeekränzchen benötigen wir nun eine Möglichkeit, die Kaffeeschulden innerhalb der Gruppe zu dokumentieren.

[4] Hierzu gehört offenbar der Leser, sonst würde er diese Ausarbeitung sicher nicht lesen.

[5] Man könnte in der Definition des Kaffeekränzchens sicherlich auch $n = 1$ zulassen, aber das ist uns zu traurig.

[6] Tee scheidet aus. Tee ist schwach.

Definition 2 (Kaffeekasse). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n-Kaffeekränzchen. Eine K-*Kaffeekasse *ist ein Tupel $k \in \mathbb{Z}^n$, $k = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ mit*

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0.$$

Für $1 \leq i \leq n$ bezeichnet Δ_i die Differenz der von p_i getrunkenen und ausgegebenen Kaffees.

Aus der Definition der Δ_i ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_i < 0 &: \; p_i \text{ bekommt noch } |\Delta_i| \text{ Kaffees} \\ \Delta_i > 0 &: \; p_i \text{ schuldet noch } \Delta_i \text{ Kaffees} \end{aligned}$$

Gibt eine Person einer anderen nun einen Kaffee aus, müssen wir die Kaffeekasse entsprechend weiterentwickeln.

Definition 3 (kaffeekassentransition). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, K ein n-Kaffeekränzchen, k eine K-Kaffeekasse sowie $i \neq j \in [n]$ so, dass p_i p_j einen Kaffee ausgibt. Die Kaffeekassentransition liefert zu k eine neue Kaffeekasse $k' = (\Delta'_1, \ldots, \Delta'_n)$ mit*

$$\Delta'_x = \begin{cases} \Delta_x - 1 & \text{, falls } x = i \\ \Delta_x + 1 & \text{, falls } x = j \\ \Delta_x & \text{, sonst} \end{cases}$$

für $x \in [n]$.

Zieht nun eine mindestens zweielementige Teilmenge des Kaffeekränzchens los, um sich gegenseitig Kaffees auszugeben, ist immer wieder die Frage zu klären, wer gerade mit Bezahlen an der Reihe ist.[7] Das allgemeine n-Kaffee-Problem formalisiert exakt diese Fragestellung.

Definition 4 (n-Kaffee-Problem). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n-Kaffeekränzchen K. Gegeben zwei Personen $p_i, p_j \in K$, die einen Kaffee zusammen trinken wollen. Das n-Kaffee-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob p_i p_j einen Kaffee ausgeben muss oder umgekehrt.*

Betrachten wir das Beispiel $n = 2$.

Beispiel (2-Kaffee-Problem). *Sei K ein 2-Kaffeekränzchen und k eine K-Kaffeekasse. Nehmen wir an, dass bisher p_1 zweimal einen Kaffee für p_2 bezahlt hat. Dann ergibt sich der Zustand $k = (-2, 2)$.*

Es lässt sich leicht erkennen, dass stets $\Delta_1 = -\Delta_2$ gelten muss. Somit können wir ohne Informationsverlust die zweite Komponente der Kaffekasse vernachlässigen und nur noch Δ_1 betrachten. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_1 < 0 &: \; \textit{p_2 schuldet p_1 noch $|\Delta_1|$ Kaffees.} \\ \Delta_1 = 0 &: \; \textit{Die Kaffeekasse ist ausgeglichen, niemand hat Kaffeeschulden.} \\ \Delta_1 > 0 &: \; \textit{p_1 schuldet p_2 noch Δ_1 Kaffees.} \end{aligned}$$

[7] Bestünde die Teilmenge lediglich aus einer Person (ohne gespaltene Persönlichkeit) entzöge dies unserem Problem dezent den Problemcharakter, was wir natürlich nicht zulassen können.

Die im Beispiel angedeutete Vereinfachungsmöglichkeit funktioniert nicht nur für $n = 2$, sondern für beliebige $n > 1$. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 1 (Kaffeesatz). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n-Kaffeekränzchen K. Um das n-Kaffee-Problem zu lösen genügen $n-1$ Komponenten von k.*

Beweis. Nach Definition 2 gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1} + \Delta_n && = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \Delta_1 + \ldots + \Delta_{n-1} && = -\Delta_n \end{aligned}$$

Das Kaffeedelta Δ_n lässt sich also aus den übrigen Kaffeedeltas direkt berechnen und braucht daher nicht explizit in der Kaffeekasse geführt zu werden. □

2.1 Explizite Kaffeekassen und das Kaffee-Paradoxon

Die definitiv in Definition 2 definierte Kaffeekasse gibt an, wie viele Kaffees eine Person insgesamt noch bekommt oder schuldet.[8] Im Allgemeinen lässt sich aber nicht entscheiden, von wem sie noch Kaffees bekommt oder wem sie Kaffees schuldet. Die Kaffeekasse ist also eine *bilanzierende Kaffeekasse*. Alternativ könnte auch eine explizite Kaffeekasse geführt werden, in der alle Kaffeeschulden innerhalb des Kaffeekränzchens einzeln ausgewiesen werden.

Definition 5 (Explizite Kaffeekasse). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n-Kaffeekränzchen. Eine* explizite K-Kaffeekasse *ist eine Matrix $\kappa \in \mathbb{N}^{n \times n}$ mit*

1. *$\delta_{i,i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ und*
2. *$\delta_{i,j} = -\delta_{j,i}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$*

Hierbei verhalten sich die einzelnen Kaffeedeltas $\delta_{i,j}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} < 0: &\quad p_i \text{ bekommt von } p_j \text{ noch } |\delta_{ij}| \text{ Kaffees.} \\ \delta_{i,j} = 0: &\quad \text{Die Kaffeebilanz zwischen } p_i \text{ und } p_j \text{ ist ausgeglichen.} \\ \delta_{i,j} > 0: &\quad p_i \text{ schuldet } p_j \text{ noch } \delta_{ij} \text{ Kaffees.} \end{aligned}$$

Für die Verwaltung der expliziten Kaffeekasse definieren wir die Transition analog zu Definition 3.

Definition 6 (Explizite Kaffeekassentransition). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, K ein Kaffeekränzchen über n, κ eine explizite K-Kaffeekasse sowie $i \neq j \in [n]$ so, dass p_i p_j einen Kaffee ausgibt. Die explizite Kaffeekassentransition liefert zu κ eine neue explizite Kaffeekasse $\kappa' \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit*

$$\delta'_{k,l} = \begin{cases} \delta_{k,l} - 1 & \text{, falls } k = i \text{ und } l = j \\ \delta_{k,l} + 1 & \text{, falls } k = j \text{ und } l = i \\ \delta_{k,l} & \text{, sonst} \end{cases}$$

für $k, l \in \mathbb{N}_{\leq n}$.

[8] Um seine Schulden loszuwerden, wird keine wörtliche Entschuldigung akzeptiert, sondern nur Kaffee.

Satz 2 (Bilanzierender Kaffeekassenexplikationssatz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein n-Kaffeekränzchen und κ eine explizite K-Kaffeekasse. Dann existiert eine entsprechende bilanzierende K-Kaffeekasse.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein n-Kaffeekränzchen und κ eine explizite K-Kaffeekasse. Dann existieren laut Definition 5 $\delta_{i,j} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ als Einträge in κ. Setze nun

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l}.$$

Trivialerweise gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \Delta_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \delta_{i,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i-1} \delta_{i,l} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=i+1}^{n} \delta_{i,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i-1} \delta_{i,l} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i-1} -\delta_{i,l} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{i-1} (\delta_{i,l} - \delta_{i,l}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die bilanzierende Kaffeekasse ergibt sich also als $k = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$. □

Beobachtung 1 (Kaffeeparadoxon)**.** *Betrachten wir das 3-Kaffeekränzchen $K = \{p_1, p_2, p_3\}$ und ihre explizite Kaffeekasse κ. Nehmen wir an, p_2 hat bisher jeweils einen Kaffee für p_1 und p_3 bezahlt. Weiter hat p_3 p_1 einen Kaffee ausgegeben. Somit ergibt sich*

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie aus Definition 6 zu erkennen ist, werden stets genau zwei symmetrische Komponenten der Matrix modifiziert, wenn ein Kaffee ausgegeben wird. Somit müssen mindestens 3 Kaffees getrunken werden, damit die Kaffeekasse wieder im schuldenfreien Zustand ist.

Bilden wir zu κ nun die bilanzierende Kaffeekasse k, so ergibt sich $k = (2, -2, 0)$. Hierbei ist unmittelbar zu erkennen, das nur 2 Kaffees benötigt werden, um die Kaffeeschulden auszugleichen.

Dieses Phänomen, welches wir als *Kaffeeparadoxon* bezeichnen, lässt sich durch das Auftreten *transitiver Kaffeeschulden* erklären. Die bilanzierende Kaffeekasse vermeidet derartige Kaffeeschulden direkt, während sie bei der expliziten Kaffeekasse manuell aufgelöst werden müssen. Welche Variante gewählt wird ist Geschmackssache[9] und hängt davon ab, wie unnötig kompliziert man es gerne möchte.

[9] Im Gegensatz zu heißem, leckeren Kaffee. Der schmeckt richtig.

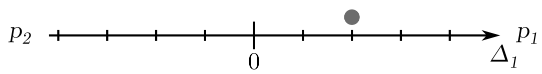

Abbildung 1: Visualisierung des 2-Kaffee-Problems. In diesem Fall schuldet p_1 p_2 noch 2 Kaffees.

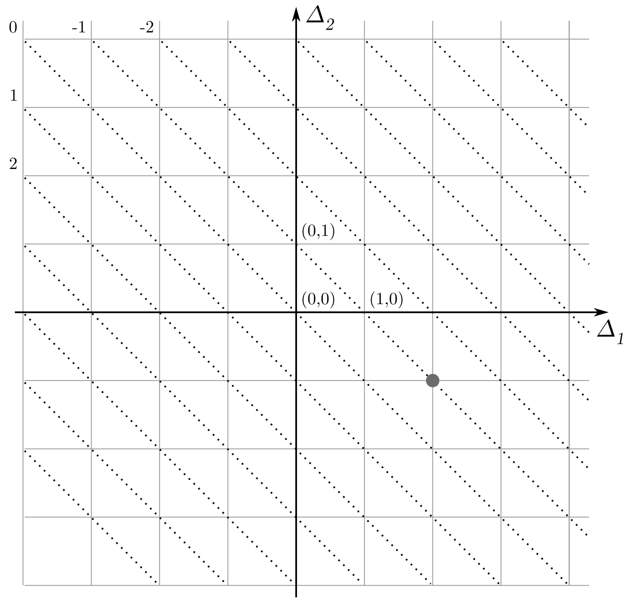

Abbildung 2: Visualisierung des 3-Kaffee-Problems mit kartesischen Koordianten. Die Darstellung entspricht der Kaffeekasse $k = (2, -1, -1)$.

3 Zweiter Hauptteil

Im folgenden stellen wir Möglichkeiten vor, das Kaffeeproblem für Gruppen aus 2 oder 3 Personen grafisch darzustellen und zu lösen.

3.1 Visualisierung des 2-Kaffee-Problems

Wie bereits in Definition 2 angesprochen, wird nur eine einzelne Komponente der Kaffeekasse benötigt. Somit stellen wir die Kaffeekasse mit einem Kaffeestrahl dar (Abbildung 1).

In der Abbildung lässt sich durch Verschieben des Punktes der Zustand aktualisieren. Hierzu wird der Punkt immer „mit dem Kaffee“ bewegt, also von der ausgebenden Person weg hin zur empfangenden Person.

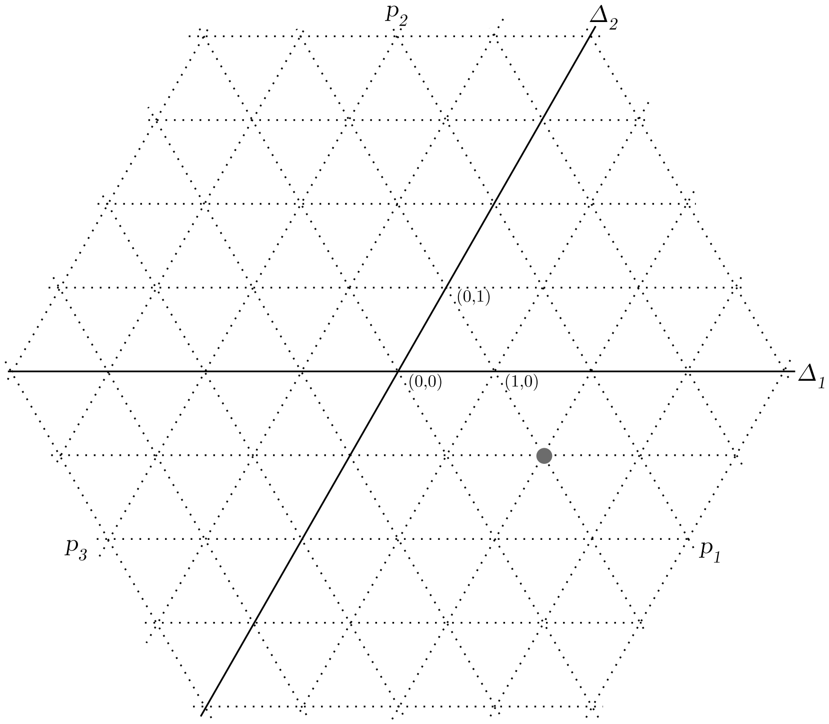

Abbildung 3: Visualisierung des 3-Kaffee-Problems mit schiefen Koordinaten. Die Darstellung entspricht der Kaffeekasse $k = (2, -1, -1)$.

3.2 Visualisierung des 3-Kaffee-Problems

Analog zu Unterabschnitt 3.1 kann für die Darstellung des 3-Kaffee-Problems ein kartesisches Koordinatensystem verwendet werden, in dem die Werte von Δ_1 und Δ_2 als Koordinaten eingetragen werden (Abbildung 2). Der sich ergebende Wert von Δ_3 kann auf den dort eingetragenen Diagonalen abgelesen werden

Die Aktualisierung der Darstellung muss erfolgen, indem der Punkt den Änderungen in Δ_1 und Δ_2 entsprechend verschoben wird. Man kommt hier zuweilen nicht drum herum, nachzudenken.

Um dieses schwerwiegende Manko zu beheben bietet sich eine Visualisierung in einem gradlinigen, nichtorthogonalen Koordinatensystem an (Abbildung 3). Die Achsen schneiden sich hier in einem Winkel von 60°. Die Darstellung unterscheidet sich prinzipiell nicht sonderlich von der Darstellung im orthogonalen Koordinatensystem. Allerdings ist das Verschieben der Markierung simpler: um einen ausgegebenen Kaffee einzutragen muss die Markierung „mit dem Kaffee“ von der ausgebenden Person weg hin zur empfangenen Person verschoben werden.

4 Schluss

In dieser durch die Einleitung eingeleiteten, durch die beiden Hauptteile angereicherten und im Schluss abgeschlossenen Arbeit haben wir das n-Kaffee-Problem eingeführt, Probleme an den Haaren herbeigezogen und schließlich Visualisierungen zu deren Lösung entwickelt.[10] Mit Hilfe des Kaffeesatzes konnten wir Kaffeekassen auf kleinere Kaffeekassen reduzieren und so auch komplexere Konstellationen visualisieren. Wir haben bilanzierende und explizite Kaffeekassen voneinander abgegrenzt und das Kaffee-Paradoxon nicht nur entdeckt, sondern auch aufgeklärt.

Zukünftige Arbeiten könnten die Auswirkungen des Ein- und Austritts von Personen zu Kaffeekränzchen auf die Kaffeekasse klären. Offen bleibt zunächst auch, ob man einfache Visualisierungen auch für n-Kaffeekränzchen mit $n > 3$ entwickeln kann. Des Weiteren hatten wir keine Lust mehr, weiter nach noch einfacheren Visualisierungen für $n < 4$ zu finden. Wir überlassen es dem geneigten wissenschaftlichen Nachwuchs, darüber Köpfe zu zerbrechen.

Literatur

[1] Marian Boldt, Claus Traulsen, and Reinhard von Hanxleden. Worst case reaction time analysis of concurrent reactive programs. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 203(4):65–79, June 2008. Proceedings of the International Workshop on Model-Driven High-Level Programming of Embedded Systems (SLA++P'07), March 2007, Braga, Portugal.

[2] Antonio Fasano, F. Talamucci, and M. Petracco. The espresso coffee problem. In *Complex Flows in Industrial Processes*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, pages 241–280. Birkhäuser Boston, 2000.

[3] Mirko Heinold. Synchronous Java, September 2010. Bachelor thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Department of Computer Science.

[4] L. Masinter. Hyper Text Coffee Pot Control Protocol (HTCPCP/1.0). RFC 2324 (Informational), April 1998.

[5] I. Nazar. The Hyper Text Coffee Pot Control Protocol for Tea Efflux Appliances (HTCPCP-TEA). RFC 7168 (Informational), April 2014.

[6] Ronald J. Troyer and Gerald E. Markle. Coffee drinking: an emerging social problem? *Social Problems*, pages 403–416, 1984.

[7] Alick D Walker. New light on the origin of birds and crocodiles. *Nature*, 237:257–263, 1972.

[10] Visualisierungen, die sich übrigens prima an Whiteboards machen.