

Vom Kaffee-Problem

Christoph Daniel Schulze Nis Børge Wechselberg

September 2014

Das n -Kaffee-Problem beschreibt die Guthaben-Schulden-Verhältnisse in einer Gruppe von $n \in \mathbb{N}$ Personen. Die Verhältnisse werden hierbei in ausgegebenen Kaffees notiert. In dieser Arbeit definieren wir das Problem und betrachten Visualisierungen mit dem Ziel, Änderungen in den Verhältnissen möglichst aufwandsminimiert notieren zu können.

1 Einleitung

Der normale universitäre Lehrstuhlbetrieb wird durch Studenten, Doktoranden und Professoren, also allgemein durch *Wissenschaftler*, aufrecht erhalten. Frei nach Paul Erdős sind Wissenschaftler Geräte, welche Kaffee in Theoreme verstoffwechseln. Heißer, schwarzer Kaffee¹ kann also völlig zu Recht als das Fundament des Fortschritts der Menschheit angesehen werden.

Um die immer wieder notwendigen und erholsamen Unterbrechungen im von ausufernden Denkprozessen gekennzeichneten Alltag herbeizuführen, ist das gemeinsame, rudelhafte Beschaffen von heißem Kaffee üblich. Dabei kommt es immer wieder vor, dass einer der Wissenschaftler kein Geld dabei hat. Ein anderer Wissenschaftler gibt ihm dann üblicherweise einen Kaffee aus in der optimistischen Hoffnung, den Gefallen irgendwann zurückgezahlt zu bekommen. Während die Schuldenverhältnisse bei zwei Personen noch einfach zu handhaben sind, ändert sich das bei größer werdenden Gruppen zunehmend.²

In dieser durch die Einleitung eingeleiteten Arbeit definieren wir zu Beginn in Abschnitt 2 das n -Kaffee-Problem, welches die Frage der Schuldenverhältnisse zwischen zwei Mitgliedern einer n Personen großen Gruppe stellt. Wir entwickeln zunächst eine analytische Lösung bevor wir in Abschnitt 3 einfache Visualisierungen für $n \leq 3$ einführen. Wir schließen die Arbeit mit dem Schluss in Abschnitt 4 und liefern Ansatzpunkte für zukünftige Überlegungen.

¹Wenn man da Milch reintut ist er nicht mehr schwarz, Junge!

²Zunahme bei größer werdenden Gruppen ist auch ein von den *Weight Watchers* behandeltes Problem, ist für uns aber nicht weiter von Relevanz.

Verwandte Arbeiten Bla.

Verwandte Arbeiten recherchieren.

2 Kaffeekränzchen und das Kaffeeproblem

Um das Kaffee-Problem betrachten zu können, müssen wir zunächst eine geeignete Menge von Personen definieren, die das Problem überhaupt interessiert.³

Definition 1 (Kaffeekränzchen). *Eine Menge $K = \{p_1, \dots, p_n\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ bezeichnen wir als Kaffeekränzchen über n Personen oder kurz n -Kaffeekränzchen.⁴*

Bei einem Kaffeekränzchen ist für diese Arbeit unerheblich, ob lediglich Kaffee oder auch Kuchen serviert wird. Wichtig ist lediglich, dass die beteiligten Personen sich gegenseitig Kaffee ausgeben.

Zusätzlich zu dem Kaffeekränzchen benötigen wir noch eine Möglichkeit, die Kaffeeschulden innerhalb der Gruppe zu dokumentieren.

Definition 2 (Kaffeekasse). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n -Kaffeekränzchen. Eine K -Kaffeekasse ist ein Tupel $k \in \mathbb{Z}^n$, $k = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$, für das gilt:*

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0.$$

Für $1 \leq i \leq n$ bezeichnet Δ_i die Differenz der von p_i getrunkenen und ausgegebenen Kaffees.

Aus der Definition der Δ_i ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta_i < 0 &: p_i \text{ bekommt noch } |\Delta_i| \text{ Kaffees} \\ \Delta_i > 0 &: p_i \text{ schuldet noch } \Delta_i \text{ Kaffees} \end{aligned}$$

Gibt eine Person einer anderen nun einen Kaffee aus, müssen wir die Kaffeekasse entsprechend weiterentwickeln.

Definition 3 (Kaffeekassensturz). *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, K ein n -Kaffeekränzchen, k eine K -Kaffeekasse sowie $i \neq j \in [n]$ so, dass p_i p_j einen Kaffee ausgibt. Der Kaffeekassensturz liefert zu k eine neue Kaffeekasse $k' = (\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)$ mit*

$$\Delta'_x = \begin{cases} \Delta_x - 1 & , \text{ falls } x = i \\ \Delta_x + 1 & , \text{ falls } x = j \\ \Delta_x & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für $x \in [n]$.

³Hierzu gehört offenbar der Leser, sonst würde er diesen Stuss ja nicht lesen

⁴Man könnte in der Definition des Kaffeekränzchens sicherlich auch $n = 1$ zulassen, aber das ist uns zu traurig.

Zieht nun eine Teilmenge des Kaffeekränzchens los, um sich gegenseitig Kaffee auszugeben, ist immer wieder die Frage zu klären, wer gerade mit Bezahlen an der Reihe ist. Das allgemeine n -Kaffee-Problem formalisiert exakt diese Fragestellung.

Definition 4 (n -Kaffee-Problem). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n -Kaffeekränzchen K . Gegeben zwei Personen $p_i, p_j \in K$, die einen Kaffee zusammen trinken wollen. Das n -Kaffee-Problem besteht darin, zu entscheiden, ob p_i p_j einen Kaffee ausgeben muss oder umgekehrt.

Betrachten wir das Beispiel $n = 2$.

Beispiel (2-Kaffee-Problem). Sei K ein 2-Kaffeekränzchen und k eine K -Kaffeekasse. Nehmen wir an, dass bisher p_1 zweimal einen Kaffee für p_2 bezahlt hat, dann ergibt sich der Zustand $k = (-2, 2)$.

Es lässt sich leicht erkennen, dass stets $\Delta_1 = -\Delta_2$ gelten muss. Somit können wir ohne Informationsverlust die zweite Komponente der Kaffeekasse vernachlässigen und nur noch Δ_1 betrachten. Hierbei gilt:

- $\Delta_1 < 0$: p_2 schuldet p_1 noch $|\Delta_1|$ Kaffees.
- $\Delta_1 = 0$: Die Kaffeekasse ist ausgeglichen, niemand hat Kaffeeschulden.
- $\Delta_1 > 0$: p_1 schuldet p_2 noch Δ_1 Kaffees.

Die im Beispiel angedeutete Vereinfachungsmöglichkeit funktioniert nicht nur für $n = 2$, sondern für beliebige $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz 1 (Kaffeersatz). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und k eine Kaffeekasse über dem n -Kaffeekränzchen K . Um das n -Kaffee-Problem zu lösen genügt eine $(n - 1)$ -Kaffeekasse.

Beweis. Nach Definition 2 gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1} + \Delta_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1} &= -\Delta_n \end{aligned}$$

Das Kaffeedelta Δ_n lässt sich also aus den übrigen Kaffeedeltas direkt berechnen und braucht daher nicht explizit in der Kaffeekasse geführt zu werden. \square

2.1 Explizite Kaffeekassen und das Kaffee-Paradoxon

Die in Definition 2 definierte Kaffeekasse modelliert einen gemeinsamen Kaffeepool innerhalb des Kaffeekränzchens. Diese Kaffeekasse kann auch als *bilanzierende Kaffeekasse* bezeichnet werden. Als alternative Notation könnte auch eine explizite Kaffeekasse vorgehalten werden, in der alle Kaffeeschulden innerhalb des Kaffeekränzchens einzeln ausgewiesen werden.

Definition 5 (Explizite Kaffeekasse). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und K ein n -Kaffeekränzchen. Eine explizite K -Kaffeekasse ist die Matrix $\kappa \in \mathbb{N}^{n \times n}$ wobei gilt:

1. $\delta_{i,i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$

2. $\delta_{i,j} = -\delta_{j,i}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$

Hierbei verhalten sich die einzelnen Kaffeedeltas $\delta_{i,j}$ wie folgt:

$\delta_{i,j} < 0$: p_j schuldet p_i noch $|\delta_{ij}|$ Kaffees.

$\delta_{i,j} = 0$: Die Kaffeebilanz zwischen p_i und p_j ist ausgeglichen.

$\delta_{i,j} > 0$: p_i schuldet p_j noch δ_{ij} Kaffees.

Für die Verwaltung der expliziten Kaffeekasse definieren wir den Kassensturz analog zu Definition 3.

Definition 6 (Expliziter Kaffeekassensturz). Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, K ein Kaffeekränzchen über n , κ eine explizite K -Kaffeekasse sowie $i \neq j \in [n]$ so, dass p_i p_j einen Kaffee ausgibt. Der explizite Kaffeekassensturz liefert zu κ eine neue explizite Kaffeekasse $\kappa' \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit

$$\delta'_{k,l} = \begin{cases} \delta_{k,l} - 1 & , \text{ falls } k = i \text{ und } l = j \\ \delta_{k,l} + 1 & , \text{ falls } k = j \text{ und } l = i \\ \delta_{k,l} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für $k, l \in \mathbb{N}_{\leq n}$.

Satz 2. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein n -Kaffeekränzchen und κ eine explizite K -Kaffeekasse. Dann existiert eine entsprechende, bilanzierende K -Kaffeekasse.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein n -Kaffeekränzchen und κ eine explizite K -Kaffeekasse. Dann existieren laut Definition 5 $\delta_{i,j} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ als Einträge in κ . Setze nun

$$\Delta_i = \sum_{l=1}^n \delta_{i,l}.$$

Dann ergibt sich die bilanzierende Kaffeekasse als $k = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$. □

Beobachtung 1 (Kaffeeparadoxon). Betrachten wir das 3-Kaffeekränzchen $K = p_1, p_2, p_3$ und ihre explizite Kaffeekasse κ . Nehmen wir an p_2 hat bisher jeweils einen Kaffee für p_1 und p_3 bezahlt. Weiter hat p_3 p_1 einen Kaffee ausgegeben. Somit ergibt sich

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie aus Definition 6 zu erkennen ist, werden stets zwei symmetrische Komponenten der Matrix modifiziert, wenn ein Kaffee ausgegeben wird. Somit müssen mindestens 3 Kaffees getrunken werden, damit die Kaffeekasse wieder im schuldenfreien Zustand ist.

Bilden wir zu κ nun die bilanzierende Kaffeekasse k , so ergibt sich $k = (2, -2, 0)$. Hierbei ist unmittelbar zu erkennen, dass nur 2 Kaffees benötigt werden, um die Kaffeeschulden auszugleichen.

Dieses Phänomen, welches wir als Kaffeeparadoxon bezeichnen, lässt sich in dem Auftreten von transitiven Kaffeeschulden begründen. Die bilanzierende Kaffeekasse vermeidet derartige Kaffeeschulden direkt, während sie bei der expliziten Kaffeekasse manuell aufgelöst werden müssen.

3 Visualisierung des Kaffeeproblems

Im folgenden stellen wir Möglichkeiten vor, das Kaffeeproblem für Gruppen aus 2 oder 3 Personen grafisch darzustellen bzw. zu lösen.

3.1 Darstellung des 2-Kaffee-Problems

Wie bereits in Definition 2 angesprochen, wird nur eine einzelne Komponente der Kaffeekasse benötigt. Somit stellen wir die Kaffeekasse wie in Abbildung 1 dar.

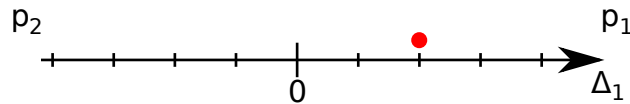


Abbildung 1: Visualisierung des 2-Kaffee-Problems. In diesem Fall schuldet p_1 p_2 noch 2 Kaffees.

In der Abbildung lässt sich durch Verschieben des Punktes der Zustand aktualisieren. Hierzu wird der Punkt immer “mit dem Kaffee” bewegt, also von der ausgehenden Person weg und auf die empfangende Person zu.

3.2 Darstellungen des 3-Kaffee-Problems

Analog zu Unterabschnitt 3.1 kann für die Darstellung des 3-Kaffee-Problems ein kartesisches Koordinatensystem verwendet werden, in dem die Werte von Δ_1 und Δ_2 als Koordinaten eingetragen werden.

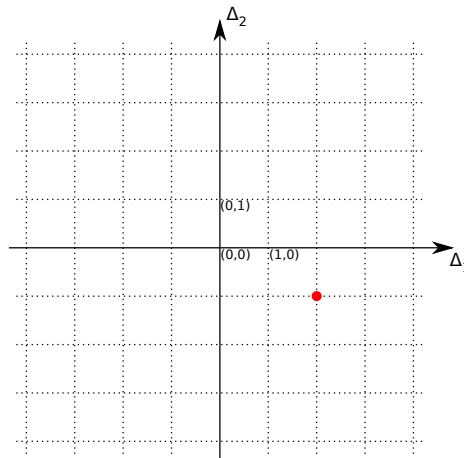


Abbildung 2: Visualisierung des 3-Kaffee-Problems mit kartesischen Koordinaten.

In Abbildung 2 ist eine kartesische Darstellung für die Kaffeekasse $k = (2, -1, -1)$ gegeben. Die Aktualisierung der Kaffeekasse, und das Ablesen der Lösung des 3-Kaffee-Problems, ist hier allerdings relativ kompliziert. Gibt zum Beispiel p_1 nun p_2 einen Kaffee aus, so muss zunächst im Kopf die neue Kaffeekasse gebildet werden, und anschliessend die neuen Werte für Δ_1 und Δ_2 eingetragen werden. Zusätzlich ist der Wert von Δ_3 nur indirekt zu erkennen. Dieser ergibt sich aus dem negativen Achsenabschnittes der fallenden Diagonalen, auf der der Punkt zur Zeit liegt.

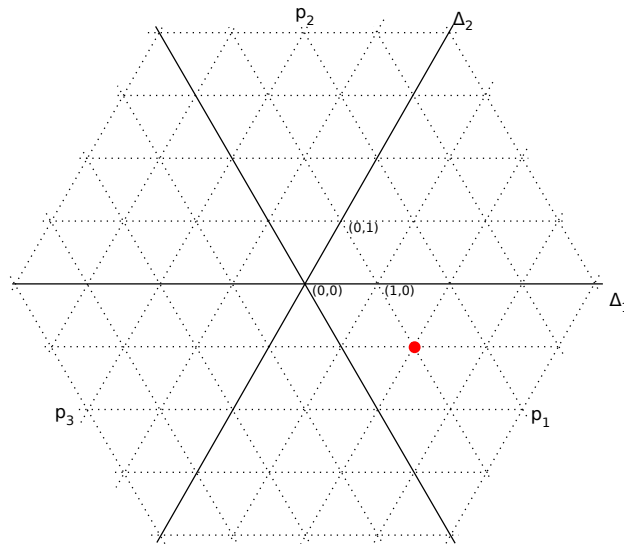


Abbildung 3: Visualisierung des 3-Kaffee-Problems mit schiefen Koordinaten

Als alternative Darstellung kann ein geradliniges, nichtorthogonales Koordinatensystem gewählt werden. In Abbildung 3 schneiden sich die Achsen mit einem Winkel von 60° . Bei dieser Art des Koordinatensystems können die selben Koordinaten verwendet werden, die bereits im kartesischen Koordinatensystem berechnet wurden. Allerdings können hier die Namen der Personen an den Seiten plaziert werden, um eine einfacher Transition zu ermöglichen. Nun kann hier auch die Markierung wieder “mit dem Kaffee”, von der ausgehenden Person weg und auf die empfangende Person zu, verschoben werden.

4 Zusammenfassung

Zusammenfassung des Papers. Mögliche Future Work:

- Kaffeeproblem für $n > 3$ visualisieren
- Wir haben noch keinen Beweis dafür, dass die Visualisierung in einem Dreieck unmöglich oder zumindest blöd ist.